

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Южно-Уральский государственный университет
Филиал в г. Миассе
Кафедра «Естественные науки и математика»

517.9(07)
Т417

М. В. Тимошенко

Дифференциальные уравнения

Курс лекций

Челябинск
Издательство ЮУрГУ
2006

Тимошенко М. В. Дифференциальные уравнения: Курс лекций. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2006. – 72 с.

В учебное пособие внесены раздел рабочей программы «Дифференциальные уравнения» для студентов инженерно – технических специальностей, а также оно может быть полезным для всех категорий студентов, изучающих данный раздел.

В нем излагается теоретический материал по данной главе, который сопровождается рассмотрением большого количества типовых примеров и задач.

Наличие в учебном пособии списка экзаменационных вопросов поможет студенту в подготовке к сдаче зачета и экзамена.

Список лит. – 8 назв.

Рецензенты: Саитгареев С. С., Тюлькин Б. М.

© Издательство ЮУрГУ, 2006.

§ 1. Общие сведения о дифференциальных уравнениях

Определение:

Уравнение, связывающее независимую переменную, искомую функцию и ее производные, называется дифференциальным:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Определение:

Если искомая (неизвестная) функция зависит от одной переменной, то дифференциальное уравнение называют обыкновенным; в противном случае – дифференциальным уравнением в частных производных.

Далее будем рассматривать только обыкновенные дифференциальные уравнения.

Определение:

Наивысший порядок производной, входящей в дифференциальное уравнение, называется порядком этого уравнения.

Пример:

$y''' - 3y'' + 2y = 0$ – обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка.

$x^2 y' + 5xy = y^2$ – обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка.

Определение:

Решением дифференциального уравнения называется функция, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество

Пример:

Показать, что данная функция $y = \ln \cos x$ является решением дифференциального уравнения первого порядка $y' = -\operatorname{tg} x$.

Решение:

Находим производную данной функции:

$$y' = \frac{1}{\cos x} (-\sin x) = -\operatorname{tg} x.$$

Подставляем значение y' в дифференциальное уравнение $y' = -\operatorname{tg} x$:
 $-\operatorname{tg} x = -\operatorname{tg} x$ – тождество.

Следовательно, функция $y = \ln \cos x$ является решением данного уравнения.

§ 2. Дифференциальные уравнения первого порядка (основные понятия)

Пункт № 1 «Основные определения»

Определение:

Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение, связывающее независимую переменную x , искомую функцию y и ее производную y' :

$$F(x, y, y') = 0. \quad (1)$$

Если уравнение (1) можно записать в виде $y' = f(x, y)$, то его называют дифференциальным уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной.

Определение:

Общим решением уравнения (1) называется такая функция $y = \Phi(x, C)$, где C — произвольная постоянная, что:

- 1) при любом конкретном значении C она является решением этого уравнения;
- 2) для любого допустимого начального условия $y(x_0) = y_0$ найдется такое значение постоянной $C = C_0$, что

$$\Phi(x_0, C_0) = y_0.$$

В некоторых случаях общее решение дифференциального уравнения приходится записывать в неявном виде

$$\Phi(x, y, C) = 0.$$

Тогда это соотношение называется общим интегралом уравнения.

Геометрически общее решение (общий интеграл) представляет собой семейство интегральных кривых на плоскости OXY .

Определение:

Частным решением дифференциального уравнения первого порядка называется функция $y = \varphi(x, C_0)$, получаемая из общего решения при конкретном значении постоянной $C = C_0$.

Задача отыскания решения дифференциального уравнения первого порядка (1), удовлетворяющего заданному начальному условию $y(x_0) = y_0$, называется задачей Коши.

С геометрической точки зрения частное решение $y = \varphi(x, C_0)$ — есть одна кривая из семейства интегральных кривых, проходящая через точку (x_0, y_0) .

Пример:

Показать, что функция $y = (x + C) \cdot e^x$ является общим решением дифференциального уравнения $y' - y = e^x$. Найти частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 2$.

Решение:

1. Найдем производную данной функции: $y' = e^x + (x + C) \cdot e^x$.

Теперь подставим значения y и y' в заданное уравнение

$$e^x + (x + C) \cdot e^x - (x + C) \cdot e^x = e^x, \quad e^x = e^x - \text{тождество.}$$

Следовательно, функция $y = (x + C) \cdot e^x$ является общим решением уравнения $y' - y = e^x$.

2. Используем начальные условия $y = 2$ при $x = 0$. Подставим их в общее решение уравнения

$$2 = (0 + C) \cdot e^0, \quad \text{так как } e^0 = 1, \text{ то } 2 = C.$$

Следовательно, $y = (x + 2) \cdot e^x$ — частное решение того же уравнения.

Теорема (существования и единственности решения задачи Коши).

Если в уравнении $y' = f(x, y)$ функция $f(x, y)$ и ее частная производная $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ непрерывны в некоторой области D , содержащей точку

(x_0, y_0) , то существует единственное решение $y = \varphi(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$ (без доказательства).

Пункт № 2 «Геометрическое истолкование дифференциального уравнения первого порядка»

Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ устанавливает зависимость между координатами точки (x, y) и угловым коэффициентом y' касательной к интегральной кривой, проходящей через эту точку. Следовательно, дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ дает поле направлений на плоскости OXY .

Определение:

Кривая, во всех точках которой направление поля одинаково, называется изоклиной.

Изоклинами можно пользоваться для приближенного построения интегральных кривых. Уравнение изоклины можно получить, если положить $y' = C$, т. е. $f(x, y) = C$.

Пример:

С помощью изоклин начертить вид интегральных кривых уравнения $y' = 2x$.

Решение:

Уравнение изоклин этого дифференциального уравнения будет $2x = C$:

$$x = \frac{C}{2} - \text{прямые, параллельные оси } OY,$$

$$C = 0 \Rightarrow x = 0, \quad \operatorname{tg} \alpha = 0, \quad \text{поэтому } \alpha = 0,$$

$$C = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = 1, \quad \text{поэтому } \alpha = 45^\circ,$$

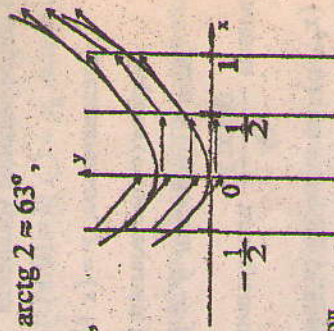
$$C = 2 \Rightarrow x = 1, \quad \operatorname{tg} \alpha = 2, \quad \text{поэтому } \alpha = \operatorname{arctg} 2 \approx 63^\circ,$$

$$C = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = -1,$$

поэтому $\alpha = -45^\circ$.

Построив четыре изоклины и отметив на каждой из них ряд стрелочек, наклонных к оси OX под определенным углом, по их направлениям строим линии.

Ответ: Линиями является семейство парабол.



§ 3. Уравнение с разделяющимися переменными

Определение:

Уравнение вида

$$P_1(x) \cdot Q_1(y) dx + P_2(x) \cdot Q_2(y) dy = 0 \quad (1)$$

называется дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными.

Уравнение (1) путем деления на произведение $Q_1(y) \cdot P_2(x)$ приводится к уравнению с разделенными переменными

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)} dx + \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)} dy = 0, \quad (2)$$

(коэффициент при dx зависит только от x , а при dy — только от y).

Общий интеграл полученного уравнения находится почленным интегрированием

$$\int \frac{P_1(x)}{P_2(x)} dx + \int \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)} dy = C.$$

Замечание:

При проведении почленного деления дифференциального уравнения на $Q_1(y) \cdot P_2(x)$ могут быть потеряны некоторые решения. Поэтому следует отдельно решить уравнение $Q_1(y) \cdot P_2(x) = 0$ и установить те решения дифференциального уравнения, которые не могут быть получены из общего решения, — особые решения.

Уравнение $y' = f_1(x) \cdot f_2(y)$ сводится к уравнению (2). Для этого достаточно положить $y' = \frac{dy}{dx}$ и разделить переменные.

Пример:

Найти частное решение дифференциального уравнения:

$$y' = \frac{1+y^2}{(1+x^2)xy}, \quad y(1) = 2.$$

Решение:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{(1+x^2)xy},$$

$$\frac{ydy}{1+y^2} = \frac{dx}{(1+x^2)x},$$

$$\int \frac{ydy}{1+y^2} = \int \frac{dx}{(1+x^2)x} \Rightarrow I_1 = I_2 + C, \quad (*)$$

$$I_1 = \int \frac{ydy}{y^2+1} = \frac{1}{2} \int \frac{dy}{t} = \frac{1}{2} \ln|t| + C_1 = \frac{1}{2} \ln|y^2+1| + C_1,$$

$$ydy = \frac{1}{2} \frac{dt}{t}$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{(1+x^2)x} = \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)x} dx = \int \frac{1}{(1+x^2)x} dx - \int \frac{x^2}{(1+x^2)x} dx =$$

$$= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{xdx}{1+x^2} = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln|x^2+1| + C_2.$$

Возвращаемся в уравнение (*):

$$\frac{1}{2} \ln|y^2+1| = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln|x^2+1| + \ln|C| \quad | \times 2,$$

$$\ln|y^2+1| = \ln \left| \frac{x^2 C^2}{x^2+1} \right|,$$

$$y^2+1 = \frac{x^2 C^2}{x^2+1},$$

$$y = \sqrt{\frac{x^2 C^2}{x^2+1} - 1} \quad \text{— общее решение.}$$

Используем начальные условия для нахождения константы

$$y(1) = 2,$$

$$2 = \sqrt{\frac{1^2 C^2}{1^2+1} - 1} \quad \text{— возведем в квадрат,}$$

$$4 = \frac{C^2}{2} - 1,$$

$$C^2 = 10.$$

Возвращаемся в общее решение, подставляя $C^2 = 10$:

$$y = \sqrt{\frac{10x^2}{x^2+1} - 1} \quad \text{— частное решение.}$$

$$\underline{\text{Ответ:}} \quad y = \sqrt{\frac{10x^2}{x^2+1} - 1}.$$

Пример:

Определить численность населения России через 20 лет, считая, что скорость прироста населения пропорциональна его наличному количеству, и зная, что население России в 2000 году составляло 145 млн. человек, а прирост населения за 2000 год был равен α % (вычислить при $\alpha = 2$ %, $\alpha = -1$ %).

Решение:

Обозначим численность населения России в момент времени t через $N = N(t)$.

Дифференциальное уравнение исследуемого процесса (скорость «прироста» пропорциональна численности населения) имеет вид

$$\frac{dN}{dt} = k \cdot N, \text{ где } k > 0 \text{ — коэффициент пропорциональности.}$$

Делим переменные:

$$\frac{dN}{N} = k dt,$$

$$\int \frac{dN}{N} = \int k dt,$$

$$\ln|N| = kt + \ln|C|,$$

$$\ln|N| - \ln|C| = kt,$$

$$\ln \frac{|N|}{|C|} = kt, \text{ так как } N > 0, \text{ имеем } \frac{N}{C} = e^{kt}.$$

$N = Ce^{kt}$ — общее решение уравнения.

Согласно условию задачи $N = 145$ при $t = 0$.

Находим частное решение:

$$145 = Ce^{k \cdot 0}, \text{ так как } e^{k \cdot 0} = 1, \text{ то } C = 145, N = 145e^{kt}.$$

Найдем значение коэффициента k , зная, что в конце 2000 года, т. е. при $t = 1$, население России будет равно

$$N = 145 + \frac{\alpha}{100} \cdot 145 \text{ млн. человек.}$$

$$145e^{k \cdot 1} = 145 + \frac{\alpha}{100} \cdot 145 \quad | : 145,$$

$$e^{k \cdot 1} = 1 + \frac{\alpha}{100} \quad \text{при } t = 1 \quad e^k = 1 + \frac{\alpha}{100}.$$

Логарифмируем это равенство:

$$\ln e^k = \ln \left(1 + \frac{\alpha}{100} \right),$$

$$k = \ln \left(1 + \frac{\alpha}{100} \right)$$

$$\Rightarrow N = 145 \cdot e^{t \cdot \ln \left(1 + \frac{\alpha}{100} \right)} = 145 \cdot e^{\ln \left(1 + \frac{\alpha}{100} \right)^t} = 145 \cdot \left(1 + \frac{\alpha}{100} \right)^t.$$

Таким образом, через 20 лет численность населения составит:

при $\alpha = 2\%$: $N = 145 \cdot (1,02)^{20} \approx 215$ (млн. человек),

при $\alpha = -1\%$: $N = 145 \cdot (0,99)^{20} \approx 119$ (млн. человек).

§ 4. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение:

Функция $f(x, y)$ называется однородной функцией n -го порядка, если при умножении каждого ее аргумента на произвольный множитель λ вся функция умножается на λ^n , т. е.

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n \cdot f(x, y).$$

Пример:

Функция $f(x, y) = x^2 - 2xy$ есть однородная функция второго порядка, поскольку

$$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 - 2(\lambda x)(\lambda y) = \lambda^2 \cdot (x^2 - 2xy) = \lambda^2 \cdot f(x, y).$$

Определение:

Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ называется однородным, если функция $f(x, y)$ есть однородная функция нулевого порядка.

Покажем, что однородное дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ можно записать в виде

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \quad (1)$$

10

Если функция $f(x, y)$ — однородная функция нулевого порядка, то, по определению, $f(x, y) = f(\lambda x, \lambda y)$. Положив $\lambda = \frac{1}{x}$, получаем

$$f(x, y) = f\left(\frac{x}{x}, \frac{y}{x}\right) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Схема решения однородного дифференциального уравнения:

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Для преобразования данного уравнения в уравнение с разделяющимися переменными используем замену переменной

$$\boxed{\frac{y}{x} = U} \quad \text{или} \quad \boxed{y = U \cdot x},$$

где $U = U(x)$ — новая неизвестная функция.

$$y' = U' \cdot x + x' \cdot U = U' \cdot x + U, \quad \text{так как } x' = 1.$$

Подставив в уравнение (1), получаем

$$U' \cdot x + U = \varphi(U),$$

$$\frac{dU}{dx} \cdot x = \varphi(U) - U,$$

$$\frac{dU}{\varphi(U) - U} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dU}{\varphi(U) - U} = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + \ln|C| = \ln|xC|.$$

Выполнив интегрирование в левой части равенства, следует заменить U на $\frac{y}{x}$.

Пример: Решить дифференциальное уравнение $y' = \frac{xy - y^2}{x^2 - 2xy}$.

Решение:

Приведем данное уравнение к однородному

11

$$y' = \frac{x^2 \left(\frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2} \right) \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x} \right)^2}{x^2 \left(1 - 2 \frac{y}{x} \right)} = \frac{1 - 2 \frac{y}{x}}{1 - 2 \frac{y}{x}}$$

Замена $\frac{y}{x} = U$ или

$$y = U \cdot x,$$

$$y' = U' \cdot x + x' \cdot U = U' \cdot x + U.$$

$$U' \cdot x + U = \frac{U - U^2}{1 - 2U},$$

$$U'x = \frac{U - U^2}{1 - 2U} - U = \frac{U - U^2 - U(1 - 2U)}{1 - 2U} = \frac{U^2}{1 - 2U},$$

$$\frac{dU}{dx} \cdot x = \frac{U^2}{1 - 2U},$$

$$\frac{1 - 2U}{U^2} dU = \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{1 - 2U}{U^2} dU = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + \ln|C| = \ln|xC|,$$

$$I = \int \frac{1 - 2U}{U^2} dU = \int \frac{1}{U^2} dU - 2 \int \frac{U}{U^2} dU = -\frac{1}{U} - 2 \ln|U| + C.$$

Возвращаясь в предыдущее равенство:

$$-\frac{1}{U} - 2 \ln|U| = \ln|xC|,$$

$$-\frac{1}{U} = \ln|xC| + \ln|U^2|,$$

$$-\frac{1}{U} = \ln|xC \cdot U^2|.$$

$$\text{Так как } U = \frac{y}{x}, \text{ то } -\frac{y}{x} = \frac{1}{\ln|xC \cdot \frac{y^2}{x^2}|},$$

$y = -\frac{x}{\ln|C \frac{y^2}{x}|}$ — общее решение

$$\text{или } -\frac{x}{y} = \ln|C \frac{y^2}{x}| \Rightarrow x e^{\frac{x}{y}} = C y^2 - \text{общее решение.}$$

Пример:

Найти линию, у которой поднормаль в любой точке так относится к сумме абсциссы и ординаты, как ордината этой точки к ее абсциссе.

Решение:



МК — нормаль;

Пропорция: $МК = FK$ поднормаль;

$$\frac{FK}{x+y} = \frac{y}{x}.$$

Из $\triangle MFK$ (прямоугольный)

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{FK}{MF} = \frac{FK}{y}$$

Из геометрического смысла производной следует, что

$$y' = \frac{FK}{y}, \quad FK = y' \cdot y.$$

Подставляем в пропорцию

$$\frac{y' \cdot y}{x+y} = \frac{y}{x},$$

$$y' = \frac{x+y}{x} = 1 + \frac{y}{x} - \text{однородное ДУ.}$$

Замена: $\frac{y}{x} = U$ или $y = U \cdot x$
 $y' = U' \cdot x + U$.

$$U' \cdot x + U = 1 + U,$$

$$U' \cdot x = 1,$$

$$\frac{dU}{dx} \cdot x = 1,$$

$$dU = \frac{dx}{x},$$

$$\int dU = \int \frac{dx}{x},$$

$$U = \ln|x| + \ln|C| = \ln|xC|.$$

Так как $U = \frac{y}{x}$, то $y = x \cdot \ln|xC|$ — общее решение.

Омзет: уравнение линии $y = x \cdot \ln|xC|$.

§ 5. Дифференциальные уравнения первого порядка, приводящиеся к однородным

Определение:

Уравнения вида $y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$ при $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ приводятся к однородным дифференциальным уравнениям заменением

полагая $\begin{cases} x = t_1 + \alpha \\ y = t_2 + \beta \end{cases}$, где $(\alpha; \beta)$ — точка пересечения прямых $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$

Если же $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, то подстановка $a_1x + b_1y = t$ позволяет раз- делить переменные.

Пример:

Решить дифференциальное уравнение $(2x + y + 1)dx + (x + 2y - 1)dy$, приведя его к однородному.

Решение:

Вычислим определитель $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 0$, следовательно, данное уравнение приводится к однородному.

Найдем точку пересечения прямых $\begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$

Для этого решим систему из данных уравнений по формулам Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3,$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = -1; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = 1.$$

$(-1; 1)$ — точка пересечения прямых.

Замена $\begin{cases} x = t_1 - 1 \\ y = t_2 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = dt_1 \\ dy = dt_2 \end{cases}$

Подставляем данные формулы в исходное уравнение

$$\frac{dt_2}{dt_1} = \frac{2(t_1 - 1) + (t_2 + 1)}{(t_1 - 1) + 2(t_2 + 1) - 1},$$

$$\frac{dt_2}{dt_1} = \frac{2t_1 + t_2}{t_1 + 2t_2} = \frac{t_1 \left(2 + \frac{t_2}{t_1}\right)}{t_1 \left(1 + 2\frac{t_2}{t_1}\right)} = \frac{2 + \frac{t_2}{t_1}}{1 + 2\frac{t_2}{t_1}} - \text{однородное Д.У.}$$

Замена $\frac{t_2}{t_1} = U$ или $t_2 = Ut_1$, где $U = U(t_1)$.

Дифференцируем по t_1 : $t_2' = U' \cdot t_1 + t_1' \cdot U = U' \cdot t_1 + U$, так как $t_1' = 1$.
Возвращаемся в уравнение

$$\begin{aligned} U' \cdot t_1 + U &= -\frac{2+U}{1+2U}, \\ \frac{dU}{dt_1} t_1 &= -\frac{2+U}{1+2U} - U = -\frac{2+U+U(1+2U)}{1+2U} = \\ &= -\frac{2+2U+2U^2}{1+2U} = -2 \frac{U^2+U+1}{1+2U}, \\ \text{т. е. } \frac{dU}{dt_1} t_1 &= -2 \frac{U^2+U+1}{1+2U}, \end{aligned}$$

$$\frac{1+2U}{U^2+U+1} dU = -2 \frac{dt_1}{t_1}.$$

Интегрируем

$$\begin{aligned} \int \frac{1+2U}{U^2+U+1} dU &= -2 \int \frac{dt_1}{t_1}, \\ I_1 &= -2I_2 + 2 \ln|C|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{1+2U}{U^2+U+1} dU = \int \frac{U^2+U+1}{(2U+1)dU} = \int \frac{dz}{z} = \ln|z| + C_1 = \\ &= \ln|U^2+U+1| + C_1, \end{aligned}$$

$$I_2 = \int \frac{dt_1}{t_1} = \ln|t_1| + C_2,$$

$$\ln|U^2+U+1| = -2 \ln|t_1| + 2 \ln|C| + \frac{1}{2},$$

$$\ln|U^2+U+1|^{\frac{1}{2}} = \ln \left| \frac{C}{t_1} \right|,$$

$$t_1 \sqrt{U^2+U+1} = C,$$

так как $U = \frac{t_2}{t_1}$, то получаем $t_1 \sqrt{\left(\frac{t_2}{t_1}\right)^2 + \frac{t_2}{t_1} + 1} = C$,

$$\sqrt{t_2^2 + t_2 t_1 + t_1^2} = C,$$

$$t_2^2 + t_2 t_1 + t_1^2 = C^2,$$

$$x = t_1 - 1 \Rightarrow t_1 = x + 1$$

$$y = t_2 + 1 \Rightarrow t_2 = y - 1$$

Подставляем в последнее равенство

$$(y-1)^2 + (y-1)(x+1) + (x+1)^2 = C^2.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получим

$$y^2 + x^2 - y + x + yx = C^2 - 1.$$

Переобозначим $C^2 - 1 = C^*$ (новая константа).

Ответ: $y^2 + x^2 - y + x + yx = C^*$ — общее решение.

Пример: Решить дифференциальное уравнение $y' = -\frac{x+y+2}{2x+2y-1}$.

Решение:

Вычислим определитель $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0$.

Следовательно, сведем рассматриваемое уравнение к уравнению с разделяющимися переменными подстановкой

$$x + y = t, \text{ где } t = t(x),$$

$$y = t - x,$$

$$dy = dt - dx.$$

Подставляем в исходное уравнение: так как $y' = \frac{dy}{dx}$, то

$$\frac{dt - dx}{dx} = -\frac{t+2}{2t-1},$$

$$\frac{dt}{dx} - 1 = \frac{-t-2}{2t-1},$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{-t-2}{2t-1} + 1 = \frac{t-3}{2t-1}.$$

Делим переменные

$$\frac{2t-1}{t-3} dt = dx.$$

Интегрируем

$$\int \frac{2t-1}{t-3} dt = \int dx = x + C,$$

$$I_1 = \int \frac{2t-1}{t-3} dt = \int 2 + \frac{5}{t-3} dt = 2t + 5 \ln|t-3| + C_1,$$

$$2t + 5 \ln|t-3| = x + C,$$

так как $x + y = t$, то $2x + 2y + 5 \ln|x + y - 3| = x + C$.

Ответ: $x + 2y + 5 \ln|x + y - 3| = C$ — общее решение.

§ 6. Линейные уравнения первого порядка

Определение:

Дифференциальное уравнение вида

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — непрерывные функции (в частности — постоянные), называется линейным уравнением первого порядка.

Если $Q(x) \equiv 0$, то уравнение принимает вид $y' + P(x)y = 0$ и называется линейным однородным. Оно является уравнением с разделяющимися переменными.

Если $Q(x) \neq 0$, то уравнение называется линейным неоднородным уравнением.

Пункт 1. Схема решения уравнения $y' + P(x)y = Q(x)$ (1)
(лист 11. Бернулли)

Решение ищем в виде произведения двух других функций, т. е. с помощью подстановки $y = UV$, где $U = U(x)$ и $V = V(x)$ — неизвестные функции от x , причем одна из них произвольна (но не равна нулю).

Тогда $y' = U'V + VU'$.

Подставим выражения U и U' в уравнение (1)

$$U'V + VU + P(x)UV = Q(x).$$

Группируем первый и третий члены, вынося V за скобку:

$$V[U' + P(x)U] + V'U = Q(x). \quad (2)$$

Подбираем функцию $V = V(x)$ так, чтобы выражение в скобках было равно нулю.

$$U' + P(x)U = 0,$$

$$\frac{dU}{dx} = -P(x)U,$$

$$\frac{dU}{U} = -P(x)dx,$$

$$\int \frac{dU}{U} = \int -P(x)dx,$$

$$\ln|U| = -\int P(x)dx,$$

$$U = e^{-\int P(x)dx}$$

Подставляя найденную функцию U в уравнение (2), получаем:

$$Ve^{-\int P(x)dx} = Q(x),$$

$$\frac{dV}{dx} = \frac{Q(x)}{e^{-\int P(x)dx}},$$

$$dV = Q(x)e^{\int P(x)dx} dx,$$

$$\int dV = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx,$$

$$V = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C.$$

Возвращаясь к переменной y , получаем решение исходного уравнения

$$y = UV = e^{-\int P(x)dx} \cdot \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right).$$

Пример:

Решить дифференциальное уравнение $xy' + y = \sin x$, где $x \neq 0$.

Решение:

Разделим все части уравнения на x : $y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x}$.

Замена $y = UV$, $y' = UV' + V'U$

$$UV' + V'U + \frac{1}{x}UV = \frac{\sin x}{x},$$

$$V \left[U' + \frac{1}{x}U \right] + V'U = \frac{\sin x}{x}.$$

1) Пусть

$$U' + \frac{1}{x}U = 0,$$

$$\frac{dU}{dx} = -\frac{1}{x}U,$$

$$\frac{dU}{U} = -\frac{1}{x}dx,$$

$$\int \frac{dU}{U} = -\int \frac{dx}{x},$$

$$\ln|U| = -\ln|x|,$$

$$\ln|U| = \ln|x^{-1}|,$$

$$U = \frac{1}{x}.$$

2) $V'U = \frac{\sin x}{x}$

$$\frac{dV}{dx} \cdot \frac{1}{x} = \frac{\sin x}{x},$$

$$dV = \sin x dx,$$

$$\int dV = \int \sin x dx,$$

$$V = -\cos x + C.$$

Возвращаясь к переменной y , получаем решение исходного уравнения:

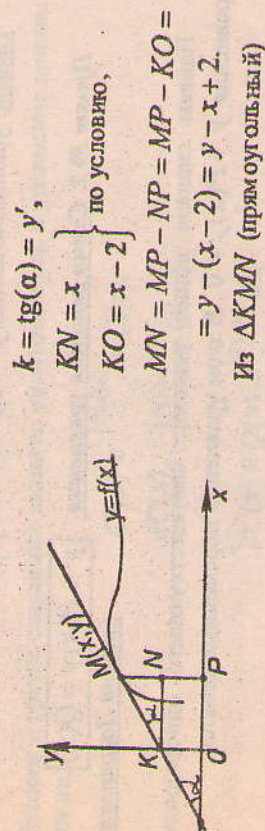
$$y = UV = \frac{1}{x}(-\cos x + C).$$

Ответ: $y = \frac{1}{x}(-\cos x + C)$ — общее решение.

Пример:

Найти линию, у которой начальная ордината любой касательной на две единицы меньше абсциссы точки касания.

Решение:



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{MN}{KN} \Rightarrow y' = \frac{y - x + 2}{x} = \frac{y}{x} + \frac{2 - x}{x} \Rightarrow y' - \frac{y}{x} = \frac{2 - x}{x}$$

Замена $y = UV$, $y' = UV' + V'U$:

$$UV' + V'U - \frac{UV}{x} = \frac{2 - x}{x},$$

$$V \left[U' - \frac{U}{x} \right] + V'U = \frac{2 - x}{x}.$$

1) Пусть

$$U' - \frac{U}{x} = 0 \Rightarrow \frac{dU}{dx} \cdot \frac{U}{x} = \frac{dU}{U} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{dU}{U} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|U| = \ln|x| \Rightarrow U = x.$$

2)

$$V'U = \frac{2 - x}{x} \Rightarrow \frac{dV}{dx} \cdot x = \frac{2 - x}{x} \Rightarrow dV = \frac{2 - x}{x^2}$$

$$\int dV = \int \frac{2 - x}{x^2} dx,$$

$$V = 2 \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{x} = 2 \left(-\frac{1}{x} \right) - \ln|x| + C.$$

Возвращаясь к переменной y , получаем решение исходного уравнения

$$y = UV = x \left(-\frac{2}{x} - \ln|x| + C \right) - \text{общее решение.}$$

Ответ: уравнение линии $y = Cx - 2 - x \ln|x|$.

Пункт № 2. Схема решения уравнения $y' + P(x)y = Q(x)$
(метод Лагранжа)

Найдем сначала общее решение соответствующего однородного уравнения $y' + P(x)y = 0$. В этом уравнении переменные разделяются:

$$\frac{dy}{dx} = -P(x)y.$$

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx.$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int P(x)dx.$$

$$\ln|y| = -\int P(x)dx + \ln|C_1|.$$

Таким образом, $\left| \frac{y}{C_1} \right| = e^{-\int P(x)dx},$

$$y = \pm C_1 \cdot e^{-\int P(x)dx} \text{ или } y = C \cdot e^{-\int P(x)dx}, \text{ где } C = \pm C_1.$$

Метод Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной) состоит в том, что постоянную C в полученном решении заменяем функцией $C(x)$, т. е. полагаем $C = C(x)$.

Решение уравнения (1) ищем в виде

$$y = C(x) \cdot e^{-\int P(x)dx}. \quad (3)$$

Находим производную

$$\begin{aligned} y' &= C'(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} + C(x) \cdot (e^{-\int P(x)dx})' = \\ &= C'(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} + C(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} \cdot (-P(x)). \end{aligned}$$

Подставляем значения y и y' в уравнение (1)

$$C''(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} + C(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} \cdot (-P(x)) + P(x) \cdot C(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} = Q(x).$$

Второе и третье слагаемые взаимно уничтожаются, и уравнение примет вид

$$C''(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} = Q(x),$$

$$\frac{dC(x)}{dx} \cdot e^{-\int P(x)dx} = Q(x),$$

$$dC(x) = Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} dx,$$

$$\int dC(x) = \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} dx,$$

$$C(x) = \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} dx + C.$$

Подставляя выражение $C(x)$ в равенство (3), получим общее решение дифференциального уравнения (1)

$$y = \left(\int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} dx + C \right) \cdot e^{-\int P(x)dx}$$

Естественно, та же формула была получена методом Бернулли.

Пример:

Решить линейное дифференциальное уравнение $y' + 2xy = 2x$ методом Лагранжа.

Решение:

Решим сначала соответствующее однородное уравнение

$$y' + 2xy = 0:$$

$$\frac{dy}{dx} = -2xy,$$

$$\frac{dy}{y} = -2x dx,$$

$$\int \frac{dy}{y} = -2 \int x dx,$$

$$\ln|y| = -2\frac{x^2}{2} + \ln|C_1|,$$

$$\ln\left|\frac{y}{C_1}\right| = -x^2,$$

$$\left|\frac{y}{C_1}\right| = e^{-x^2},$$

$$y = \pm C_1 e^{-x^2} \text{ или } y = C e^{-x^2}, \text{ где } C = \pm C_1.$$

Заменяем $C = C(x)$, т. е. решение ищем в виде

$$y = C(x) \cdot e^{-x^2},$$

$$y' = C'(x) \cdot e^{-x^2} + C(x) \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x).$$

$$\text{Тогда } C'(x) \cdot e^{-x^2} + C(x) \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x) + 2x \cdot C(x) \cdot e^{-x^2} = 2x,$$

$$C'(x) \cdot e^{-x^2} = 2x,$$

$$\text{так как } C''(x) = \frac{dC'(x)}{dx}, \text{ то } \frac{dC(x)}{dx} = 2x \cdot e^{x^2},$$

$$dC(x) = 2xe^{x^2} dx,$$

$$\int dC(x) = \int 2xe^{x^2} dx,$$

$$C(x) = e^{x^2} + C.$$

Поэтому $y = (e^{x^2} + C) \cdot e^{-x^2} = 1 + C \cdot e^{-x^2}$ – общее решение.

$$\text{Ответ: } y = 1 + C \cdot e^{-x^2}.$$

§ 7. Уравнения Я. Бернулли

Определение:
Уравнение вида

$$\boxed{y' + P(x)y = Q(x)y^n}, \quad (1)$$

$n \in R, n \neq 0, n \neq 1$ называется уравнением Бернулли.

Если $n = 0$, дифференциальное уравнение (1) – линейное.
Если $n = 1$, то дифференциальное уравнение (1) – с разделяющимися переменными.

Покажем, что его можно привести к линейному.

Разделим уравнение (1) на $y^n \neq 0$, получим

$$\frac{y'}{y^n} + P(x) \frac{y}{y^n} = Q(x),$$

$$y'y^{-n} + P(x)y^{1-n} = Q(x). \quad (2)$$

Замена $\boxed{z = y^{1-n}}$, где $z = z(x)$.

$$z' = \frac{dz}{dx} = (1-n)y^{1-n-1} \cdot y',$$

$$\frac{z'}{(1-n)} = y^{-n} \cdot y'.$$

Уравнение (2) принимает вид

$$\frac{z'}{(1-n)} + P(x) \cdot z = Q(x).$$

Последнее уравнение является линейным относительно z . Решение его ищем в виде $z = UV$, где $U = U(x), V = V(x)$.

Таким образом, подстановка $z = y^{1-n}$ сводит уравнение (1) к линейному.

На практике дифференциальное уравнение (1) удобнее искать методом И. Бернулли в виде $y = UV$ (не сводя его к линейному).

Пример:

$$\text{Решить дифференциальное уравнение } y' + \frac{y}{x} = \frac{y^2}{2} \cdot \frac{\ln x}{x}.$$

Решение:

1) Решим уравнение переводом в линейное

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{y^2 \ln x}{2x} \quad | : y^2 \neq 0,$$

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{y}{y^2} = \frac{\ln x}{2x},$$

$$y^{-2} y' + \frac{1}{x} y^{-1} = \frac{\ln x}{2x}.$$

Замена $z = y^{-1}$, $z = z(x)$,

$$z' = \frac{dz}{dx} = -y^{-2} y',$$

$$-z' = y^{-2} y',$$

$$-z' + \frac{1}{x} z = \frac{\ln x}{2x} \quad | \times (-1),$$

$$z' - \frac{1}{x} z = -\frac{\ln x}{2x} \quad \text{— линейное уравнение.}$$

$$z = UV$$

$$\text{Замена} \quad z' = UV' + V'U,$$

где $U = U(x)$, $V = V(x)$.

$$UV' + V'U - \frac{1}{x} UV = -\frac{\ln x}{2x},$$

$$V \left[U' - \frac{1}{x} U \right] + V'U = -\frac{\ln x}{2x}.$$

$$\text{Пусть } U' - \frac{1}{x} U = 0$$

$$\frac{dU}{dx} = \frac{1}{x} U,$$

$$\frac{dU}{U} = \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{dU}{U} = \int \frac{dx}{x},$$

$$\ln|U| = \ln|x|,$$

$$U = x.$$

$$\text{Тогда } V'U = -\frac{\ln x}{2x}$$

$$\frac{dV}{dx} x = -\frac{\ln x}{2x},$$

$$dV = -\frac{\ln x}{2x^2} dx,$$

$$\int dV = -\frac{1}{2} \int \frac{\ln x}{x^2} dx,$$

$$\left| \int UdV = UV - \int VdU \right|$$

$$V = -\frac{1}{2} \int \frac{\ln x}{x^2} dx = U_1 = \ln x; \int dV_1 = \int \frac{dx}{x^2} =$$

$$\left| dU_1 = \frac{1}{x} dx; V_1 = -\frac{1}{x} \right|$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\ln x \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) - \int \left(-\frac{1}{x}\right) \frac{1}{x} dx \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2} =$$

$$= \frac{\ln x}{2x} + \frac{1}{2x} + C.$$

$$\Rightarrow z = UV = x \left(\frac{\ln x}{2x} + \frac{1}{2x} + C \right) = \frac{1}{2} (\ln x + 1 + 2Cx),$$

так как $z = y^{-1} \Rightarrow y = \frac{2}{\ln x + 2Cx + 1}$ — общее решение.

2) Решим уравнение методом Я. Бернулли (не сводя его к линейному y)

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{y^2}{2} \cdot \frac{\ln x}{x}.$$

$$z = UV$$

$$z' = UV' + V'U,$$

где $U = U(x)$, $V = V(x)$.

$$UV' + V'U + \frac{1}{x} UV = \frac{U^2 V^2 \ln x}{2x},$$

$$V \left[U' + \frac{1}{x} U \right] + V'U = \frac{U^2 V^2 \ln x}{2x}.$$

Пусть $U' + \frac{1}{x}U = 0$.

$$\frac{dU}{dx} = -\frac{1}{x}U,$$

$$\frac{dU}{U} = -\frac{1}{x}dx,$$

$$\int \frac{dU}{U} = -\int \frac{dx}{x},$$

$$\ln|U| = -\ln|x|,$$

$$U = \frac{1}{x}.$$

Тогда $V'U = \frac{U^2 V^2 \ln x}{2x}$:

$$\frac{dV}{dx} = \frac{UV^2 \ln x}{2x}$$

$$\frac{dV}{dx} = \frac{V^2 \ln x}{2x^2},$$

$$\frac{dV}{V^2} = \frac{\ln x}{2x^2} dx,$$

$$\int \frac{dV}{V^2} = \int \frac{\ln x}{2x^2} dx \quad (\text{см. решение этого интеграла в первой части}),$$

$$-\frac{1}{V} = -\left(\frac{\ln x}{2x} + \frac{1}{2x} + C\right),$$

$$V = \frac{2x}{\ln x + 1 + 2Cx},$$

$$y = UV = \frac{1}{x} \cdot \frac{2x}{\ln x + 1 + 2Cx} = \frac{2}{\ln x + 2Cx + 1} \quad \text{-- общее решение.}$$

Ответ: $y = \frac{2}{\ln x + 2Cx + 1}$.

§ 8. Уравнение в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель

Определение:

Уравнение

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (1)$$

называется уравнением в полных дифференциалах, если его левая часть есть полный дифференциал некоторой функции $U(x, y)$, т. е. $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dU(x, y)$.

В этом случае дифференциальное уравнение (1) можно записать в виде $dU(x, y) = 0$, а его общий интеграл будет

$$U(x, y) = C \quad (2)$$

Теорема:

Для того чтобы выражение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, где функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ и их частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны в некоторой области D плоскости XOY , было полным дифференциалом, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (3)$$

Доказательство:

1) Необходимость.

Пусть выражение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ есть полный дифференциал, т. е.

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dU(x, y).$$

Учитывая, что $dU(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy$, имеем

$$P(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad Q(x, y) = \frac{\partial U}{\partial y}.$$

Дифференцируя эти равенства по y и по x соответственно, получаем

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x},$$

а так как смешанные частные производные равны между собой, т.е.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}, \text{ получаем } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

2) Достаточность.

Пусть в области D выполняется условие (3). Покажем, что существует функция $U(x, y)$ в области D такая, что

$$dU(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Найдем эту функцию. Искомая функция должна удовлетворять требованиям

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x, y) \text{ и } \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y) \quad (4)$$

В первом уравнении (4) зафиксируем y и проинтегрируем его по x , получим

$$U(x, y) = \int P(x, y)dx + \varphi(y). \quad (5)$$

Здесь произвольная постоянная $C = \varphi(y)$ зависит от y (либо является числом). В решении (5) не известна лишь $\varphi(y)$. Для ее нахождения проинтегрируем функцию (5) по y

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \left(\int P(x, y)dx \right)'_y + \varphi'(y).$$

Используя второе равенство (4), можно записать:

$$Q(x, y) = \left(\int P(x, y)dx \right)'_y + \varphi'(y), \quad (6)$$

$$\varphi'(y) = Q(x, y) - \left(\int P(x, y)dx \right)'_y.$$

В равенстве (6) левая часть зависит от y . Покажем, что и правая часть равенства зависит только от y . Для этого дифференцируем правую часть по x и убедимся, что производная равна нулю.

Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\int P(x, y)dx \right) \right) &= \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \left(\int P(x, y)dx \right) = \\ &= \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\int P(x, y)dx \right) \right) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \left(P \right) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \end{aligned}$$

в силу условия (3).

Из равенства (6) находим $\varphi(y)$:

$$\varphi(y) = \int \left(Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\int P(x, y)dx \right) \right) dy + C, \quad C - \text{const.}$$

Подставляя найденные значения для $\varphi(y)$ в равенство (5), находим функцию $U(x, y)$. Решение записываем в виде (2).

Функция $U(x, y)$ может быть найдена и по формуле

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y)dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y)dy,$$

где (x_0, y_0) — некоторая фиксированная точка из области непрерывности функций $P(x, y)$, $Q(x, y)$ и x частных производных.

Пример: Решить уравнение $y' = \frac{5-2xy}{3y^2+x^2}$.

Решение:

Запишем уравнение в дифференциальной форме

$$(2xy-5)dx + (3y^2+x^2)dy = 0.$$

Здесь $P(x, y) = 2xy-5$, $Q(x, y) = 3y^2+x^2$,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x; \quad \frac{dQ}{dx} = 2x \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Следовательно, данное уравнение есть уравнение в полных дифференциалах. Найдем функцию $U(x, y)$

$$U(x, y) = \int_0^x (2xy-5)dx + \int_0^y 3y^2 dy,$$

$$U(x, y) = \left(2y \frac{x^2}{2} - 5x \right) \Big|_0^x + \left(3 \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^y,$$

$$U(x, y) = yx^2 - 5x + y^3.$$

Общий интеграл имеет вид $U(x, y) = C$, т.е. $yx^2 - 5x + y^3 = C$.
Ответ: $yx^2 - 5x + y^3 = C$.

Замечание:

Если условие (3) не выполняется для уравнения (1), то в ряде случаев его можно свести к уравнению в полных дифференциалах, умножив на некоторую функцию $t(x, y) = t$, называемую «интегрирующим множителем».

Интегрирующий множитель легко находится в двух случаях: если $t = t(x)$ или $t = t(y)$ в первом случае

$$t(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} dx}, \text{ причем выражение } \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \text{ должно зависеть только от } x,$$

во втором случае

$$t(y) = e^{\int \frac{\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}}{P} dy}, \text{ причем подынтегральное выражение должно зависеть только от } y.$$

Пример: Решить уравнение: $(x^2 - y)dx + (x^2 y^2 + x)dy = 0$.

Решение:

Здесь $P(x, y) = x^2 - y$; $Q(x, y) = (x^2 y^2 + x)$,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -1; \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xy^2 + 1, \text{ т.е. } \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = -2.$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = -2$$

$$\text{Однако } \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{-2}{x^2 y^2 + x} = -\frac{2}{x(y^2 + 1)} \text{ зависит только от } x.$$

Следовательно, уравнение имеет интегрирующий множитель, зависящий только от x .

$$t(x) = e^{\int \frac{-2}{x} dx} = e^{-2 \ln |x|} = e^{\ln \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{x^2}.$$

Умножим исходное уравнение на $t = \frac{1}{x^2}$, получим

$$(1 - \frac{y}{x^2})dx + (y^2 + \frac{1}{x})dy = 0.$$

$$\text{Пусть } P_1(x, y) = 1 - \frac{y}{x^2}; Q_1(x, y) = y^2 + \frac{1}{x},$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} = -\frac{1}{x^2}; \frac{\partial Q_1}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}, \text{ т.е. } \frac{\partial P_1}{\partial y} = \frac{\partial Q_1}{\partial x}.$$

Следовательно, уравнение стало уравнением в полных дифференциалах. Найдем функцию $U(x, y)$:

$$U(x, y) = \int_1^x (1 - \frac{y}{x^2}) dx + \int_0^y (y^2 + 1) dy,$$

$$U(x, y) = (x + y \frac{1}{x}) \Big|_1^x + (\frac{y^3}{3} + y) \Big|_0^y,$$

$$U(x, y) = x + \frac{y}{x} - 1 - y + \frac{y^3}{3} + y,$$

$$U(x, y) = x + \frac{y}{x} + \frac{y^3}{3} - 1.$$

Общий интеграл имеет вид $U(x, y) = C$, т.е.

$$x + \frac{y}{x} + \frac{y^3}{3} - 1 = C,$$

$$x + \frac{y}{x} + \frac{y^3}{3} = C + 1.$$

Пусть $C + 1 = C_1$.

$$\text{Ответ: } x + \frac{y}{x} + \frac{y^3}{3} = C_1.$$

§ 9. Уравнение Лагранжа и Клеро

Пункт № 1 «Уравнение Лагранжа»

Определение:

Уравнение вида

$$y = x\varphi(y') + \psi(y'), \quad (1)$$

где φ и ψ — известные функции от $y' = \frac{dy}{dx}$, называется уравнением Лагранжа.

Схема решения:

Введем вспомогательный параметр, положив $y' = p$.

Тогда уравнение (1) примет вид $y = x\varphi(p) + \psi(p)$.

Дифференцируя по x , получим

$$\frac{dy}{dx} = x\varphi'(p) + \varphi(p) + \psi'(p) \frac{dp}{dx}, \quad \text{так как } x' = 1, \frac{dy}{dp} = p$$

$$\Rightarrow p = \varphi(p) + (x\varphi'(p) + \psi'(p)) \frac{dp}{dx}, \quad \text{или}$$

$$(p - \varphi(p)) \frac{dx}{dp} = x\varphi'(p) + \psi'(p),$$

$$(p - \varphi(p)) \frac{dx}{dp} - x\varphi'(p) = \psi'(p).$$

Полученное уравнение линейное относительно x и $\frac{dx}{dp}$.

Если его решение будет $x = f(p; C)$, то общее решение уравнения (1) записывается в виде

$$\begin{cases} x = f(p; C) \\ y = x\varphi(p) + \psi(p) = f(p; C)\varphi(p) + \psi(p) \end{cases}$$

Уравнение (1) может иметь особое решение, вида

$$y = \varphi(p_0)x + \psi(p_0),$$

где p_0 — корень уравнения $p = \varphi(p)$.

Пример: Решить дифференциальное уравнение $y = xy'^2 + y'^2$.

Решение:

Замена: $y' = p \Rightarrow y = xp^2 + p^2$ — дифференцируем

$$\frac{dy}{dx} = x'p^2 + x \cdot 2pp' + 2pp',$$

$$\text{так как } \frac{dy}{dx} = p, \text{ а } x' = 1 \Rightarrow p = p^2 + (2xp + 2p) \frac{dp}{dx},$$

$$p - p^2 = 2p(x+1) \frac{dp}{dx},$$

$$\int \frac{dx}{x+1} = \int \frac{2pdp}{p(1-p)},$$

$$\ln|x+1| = -2 \ln|1-p| + \ln C,$$

$$x+1 = \frac{C}{(1-p)^2},$$

$$\text{так как } y = xp^2 + p^2 = p^2(x+1) \Rightarrow y = \frac{p^2 C}{(1-p)^2}.$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x+1 = \frac{C}{(1-p)^2} \\ y = \frac{p^2 C}{(1-p)^2} \end{cases},$$

Пункт № 2 «Уравнение Клеро»

Определение:

Уравнением Клеро называется уравнение вида

$$y = xy' + \psi(y'),$$

которое является частным случаем уравнения Лагранжа.

Схема решения:

Используем замену $y' = p$, где $p = p(x)$. Тогда уравнение Клеро примет вид $y = xp + \psi(p)$. Дифференцируем по x

$$\frac{dy}{dx} = x'p + xp' + \psi'(p)p',$$

$$\text{так как } \frac{dy}{dx} = p, \text{ а } x' = 1 \Rightarrow p = p + (x + \psi'(p)) \frac{dp}{dx},$$

$$x' = 1 \Rightarrow p = p + (x + \psi'(p)) \frac{dp}{dx},$$

$$(x + \psi'(p)) dp = 0.$$

Следовательно, $x + \psi'(p) = 0$ или $dp = 0$. Интегрируя, получим общее решение $y = Cx + \psi(C)$.

Особое решение получается путем исключения параметра p из уравнения $y = px + \psi(p)$ и $x = -\psi'(p)$.

Пример: Решить дифференциальное уравнение $y = xu' - e^{u'}$.

Решение:

Замена: $y' = p$. Тогда уравнение имеет вид $y = xp - e^p$. Дифференцируем по x

$$\frac{dy}{dx} = x'p + xp' - e^p p',$$

$$\text{так как } \frac{dy}{dx} = p, \text{ а } x' = 1, \text{ получим}$$

$$p = p + (x - e^p) \frac{dp}{dx},$$

$$(x - e^p) dp = 0,$$

$$x - e^p = 0 \text{ или } dp = 0.$$

1. Пусть $dp = 0 \Rightarrow p = C$, подставляя в уравнение, получим.
 $y = Cx - e^C$ — общее решение.

2. Пусть $x - e^p = 0 \Rightarrow x = e^p$, подставляя в уравнение, получим

$$y = e^p p - e^p = (p - 1)e^p.$$

Выражаем p из $x = e^p$

$$\ln x = \ln e^p,$$

$$\ln x = p,$$

$$\text{получаем } y = (\ln x - 1)e^{\ln x} = (\ln x - 1)x.$$

Следовательно, $\begin{cases} x = e^p \\ y = (\ln x - 1)x \end{cases}$ — особое решение.

Ответ: $y = Cx - e^C$ — общее решение.

$$\begin{cases} x = e^p \\ y = (\ln x - 1)x \end{cases} \text{ — особое решение.}$$

§ 10. Дифференциальные уравнения высших порядков

Пункт № 1 «Дифференциальные уравнения второго порядка (основные понятия)»

Определение:

Дифференциальным уравнением второго порядка называется уравнение, связывающее независимую переменную, функцию и производные первого и второго порядка от этой функции

$$\boxed{F(x; y; y'; y'') = 0} \quad (1)$$

или, если это возможно, в виде, разрешенном относительно старшей производной

$$\boxed{y'' = f(x; y; y')} \quad (2)$$

Определение:

Решением дифференциального уравнения (2) называется всякая функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в это уравнение обращает его в тождество.

График функции в этом случае называется интегральной кривой.

Определение:

Общим решением уравнения (2) называется всякая функция $y = \varphi(x; C_1; C_2)$, зависящая от двух произвольных постоянных C_1 и C_2 , такая, что:

- 1) она является решением этого уравнения при любых конкретных значениях C_1 и C_2 ;
- 2) при любых допустимых начальных условиях

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0 \quad (3)$$

можно подобрать такие значения C_1^0 и C_2^0 постоянных, что функция $y = \varphi(x; C_1^0; C_2^0)$ будет удовлетворять этим начальным условиям.

Определение:

Любая функция $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$, получающаяся из общего решения уравнения (2) при конкретных значениях постоянных C_1 и C_2 , называется частным решением этого уравнения.

Теорема (существования и единственности решения)

Если в уравнении (2) функция $f(x; y; y')$ и ее частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны в некоторой области D изменения переменных x, y и y' , то существует, и притом единственное, решение $y = \varphi(x)$ уравнения (2), удовлетворяющее начальным условиям (3) (без доказательства).

Пункт № 2 «Дифференциальные уравнения n -го порядка»

Определение:

Дифференциальным уравнением n -го порядка называется уравнение вида

$$F(x; y; y'; y''; \dots; y^{(n)}) = 0$$

или

$$y^{(n)} = f(x; y; y'; \dots; y^{(n-1)})$$

если его можно разрешить относительно старшей производной.

Начальные условия для таких дифференциальных уравнений имеют вид

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad y''(x_0) = y''_0, \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}_0.$$

Определение:

Общее решение дифференциального уравнения n -го порядка является функцией вида $y = \varphi(x; C_1; C_2; \dots; C_n)$, содержащей n произвольных, не зависящих от x постоянных.

Определение:

Решение дифференциального уравнения, получающееся из общего решения при конкретных значениях постоянных

$$C_1 = C_1^0, \quad C_2 = C_2^0, \dots, \quad C_n = C_n^0, \text{ называется частным решением.}$$

§ 11. Уравнения, допускающие понижения порядка

Пункт № 1. «Дифференциальные уравнения вида $y'' = f(x)$ »

Интегрированием обеих частей уравнения $y'' = f(x)$ оно приводится к уравнению первого порядка

$$y' = \int f(x) dx = F(x) + C_1.$$

Повторно интегрируя полученное уравнение, находим общее решение исходного уравнения

$$y = \int (F(x) + C_1) dx + C_2.$$

Замечание:

Общее решение простейшего дифференциального уравнения n -го порядка $y^{(n)} = f(x)$ находится n -кратным интегрированием и содержит n произвольных постоянных.

Пример: Решить уравнение $y'' = \sin 2x$.

Решение:

$$y' = \int \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x + C_1,$$

$$y = \int \left(-\frac{1}{2} \cos 2x + C_1\right) dx = -\frac{1}{2} \int \cos 2x dx + C_1 \int dx =$$

$$= -\frac{1}{4} \sin 2x + C_1 x + C_2.$$

Ответ: $y = -\frac{1}{4} \sin 2x + C_1 x + C_2$ — общее решение.

Пункт № 2 «Дифференциальные уравнения $F(x; y'; y'') = 0$, явно не содержащие искомой функции y »

Такие уравнения допускают понижение порядка подстановкой $y' = z$, $y'' = z'$, где $z = z(x)$ — новая неизвестная функция.

Замечание:

Дифференциальное уравнение вида $F(x; y^{(k)}; y^{(k+1)}; \dots; y^{(n)}) = 0$, не содержащее в явном виде искомой функции y , допускает понижение порядка подстановкой $y^{(k)} = z$.

Пример: Решить уравнение $y'' = x + y'$.

Решение:

Замена: $y' = z$, $y'' = z'$, где $z = z(x)$

$$z' = x + z,$$

$z' - z = x$ — линейное дифференциальное уравнение первого порядка.

Замена: $z = UV$, где $U = U(x)$, $V = V(x)$.

Следовательно, $z' = UV' + V'U$,

$$UV' + V'U - UV = x,$$

$$V[U' - U] + V'U = x.$$

Пусть $U' - U = 0$:

$$\frac{dU}{dx} = U, \quad \frac{dU}{U} = dx, \quad \int \frac{dU}{U} = \int dx,$$

$$\ln|U| = x, \quad U = e^x.$$

Тогда $V'U = x$:

$$\frac{dV}{dx} e^x = x, \quad dV = e^{-x} x dx, \quad \int dV = \int e^{-x} x dx,$$

формула интегрирования по частям

$$V = \int e^{-x} x dx = \left| \begin{array}{l} U_1 = x \\ dU_1 = dx \end{array} \right| \begin{array}{l} dV_1 = e^{-x} dx \\ V_1 = -e^{-x} \end{array} \int U_1 dV_1 = U_1 V_1 - \int V_1 dU_1 =$$

$$= -xe^{-x} + \int e^{-x} dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C_1 = -e^{-x}(x+1) + C_1.$$

Следовательно, $z = UV = e^x(-e^x(x+1) + C_1) = -(x+1) + e^x C_1$, так как $z = y'$, то $y' = -(x+1) + e^x C_1$,

$$y = \int (-x-1+e^x C_1) dx,$$

$$y = -\frac{x^2}{2} - x + C_1 e^x + C_2 \text{ — общее решение.}$$

Ответ: $y = -\frac{x^2}{2} - x + C_1 e^x + C_2.$

Пункт № 3 «Дифференциальные уравнения $F(y; y'; y'') = 0$, явно не содержащие независимой переменной x »

Уравнения такого вида допускают понижение порядка подстановкой $y' = z$, где $z = z(y)$.

Откуда $y'' = (z(y))' = z'(y)y' = z'(y)z$

Замечание:

Дифференциальное уравнение вида $F(y; y'; y''; \dots; y^{(n)}) = 0$, не содержащее явно аргумент x , допускает понижение порядка на единицу подстановкой

$$y' = z, \text{ где } z = z(y).$$

При этом $y'' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z'z$

$$y'' = \frac{d}{dx}(z'z) = \frac{d}{dy}(z'z) \cdot \frac{dy}{dx} = (z''z + (z')^2) \cdot z \text{ и т. д.}$$

Пример: Решить дифференциальное уравнение $yy'' + (y')^2 = 1$.
Решение:

Замена $y' = z$, $y'' = z'z$, где $z = z(y)$

$$yz'z + z^2 = 1,$$

$yz'z = 1 - z^2$ — уравнение с разделяющимися переменными.

$$y \frac{dz}{dy} z = 1 - z^2, \quad \frac{zdz}{1 - z^2} = \frac{dy}{y},$$

$$\int \frac{zdz}{1 - z^2} = \int \frac{dy}{y} = \ln|y| + \ln|C_1| = \ln|yC_1|,$$

$$\int \frac{zdz}{1 - z^2} = \left| \begin{array}{l} 1 - z^2 = t \\ -2zdz = dt \\ zdz = -\frac{1}{2} dt \end{array} \right| = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{2} \ln|1 - z^2|,$$

$$-\frac{1}{2} \ln|1 - z^2| = \ln|yC_1|,$$

$$\ln|1 - z^2| = \ln \left| \frac{1}{(yC_1)^2} \right|,$$

$$1 - z^2 = \frac{1}{(yC_1)^2},$$

$$z = \frac{\sqrt{(yC_1)^2 - 1}}{yC_1}.$$

$$\text{так как } z = y' = \frac{dy}{dx}, \text{ то } \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{(yC_1)^2 - 1}}{yC_1}.$$

Делим переменные

$$\frac{yC_1 dy}{\sqrt{(yC_1)^2 - 1}} = dx,$$

$$C_1 \int \frac{y dy}{\sqrt{(yC_1)^2 - 1}} = \int dx = x + C_2,$$

$$\int \frac{y dy}{\sqrt{(yC_1)^2 - 1}} = \left| \begin{array}{l} (yC_1)^2 - 1 = t^2 \\ 2yC_1^2 dy = 2tdt \\ ydy = \frac{tdt}{C_1^2} \end{array} \right| = \frac{1}{C_1^2} \int \frac{tdt}{t} = \frac{1}{C_1^2} \sqrt{(yC_1)^2 - 1},$$

$$\frac{1}{C_1} \sqrt{(yC_1)^2 - 1} = x + C_2,$$

$(yC_1)^2 - 1 = C_1^2(x + C_2)^2$ — общее решение.

$$\text{Ответ: } y = \sqrt{(x + C_2)^2 + \frac{1}{C_1^2}}.$$

Пункт № 4 «Дифференциальные уравнения вида $F(x, y, y'; y'') = 0$, где функция F является однородной функцией относительно переменных y, y' и y'' »

Если функция F является однородной функцией относительно переменных y, y' и y'' , т. е.

$$F(x, ty; ty'; ty'') = t^k \cdot F(x, y; y'; y''),$$

то дифференциальное уравнение

$$F(x, y; y'; y'') = 0 \text{ допускает понижения порядка подстановкой}$$

$$y = e^{\int z dx}, \text{ где } z = z(x) \text{ — новая неизвестная функция.}$$

тогда $y' = e^{\int z dx} (\int z dx)' = e^{\int z dx} \cdot z$,

$$y'' = e^{\int z dx} (\int z dx)' \cdot z + e^{\int z dx} \cdot z' = e^{\int z dx} (z^2 + z').$$

Пример: Решить дифференциальное уравнение $x^2 y y'' = (y - xy')^2$.

Решение:

Замена $y = e^{\int z dx}$, где $z = z(x)$.

$$y' = e^{\int z dx} \cdot z,$$

$$y'' = e^{\int z dx} (z^2 + z'),$$

$$x^2 e^{\int z dx} e^{\int z dx} (z^2 + z') = (e^{\int z dx} - x e^{\int z dx} \cdot z)^2,$$

$$e^{2 \int z dx} (x^2 z^2 + x^2 z') = (e^{\int z dx} (1 - xz))^2,$$

$$e^{2 \int z dx} (x^2 z^2 + x^2 z') = e^{2 \int z dx} (1 - xz)^2,$$

так как $e^{2 \int z dx} \neq 0$, то $x^2 z^2 + x^2 z' = 1 - 2xz + x^2 z'^2$.

Приведа подобные члены, получим

$$x^2 z' = 1 - 2xz.$$

$z' + \frac{2}{x} z = \frac{1}{x^2}$ — линейное дифференциальное уравнение первого порядка.

Замена $z = UV$, где $U = U(x)$, $V = V(x)$.

$$z' = UV' + VU',$$

$$UV' + VU' + \frac{2}{x} UV = \frac{1}{x^2},$$

$$V \left[U' + \frac{2}{x} U \right] + V' U = \frac{1}{x^2}.$$

Пусть $U' + \frac{2}{x} U = 0$:

$$\frac{dU}{dx} = -\frac{2}{x} U,$$

$$\int \frac{dU}{U} = -2 \int \frac{dx}{x},$$

$$\ln |U| = -2 \ln |x|,$$

$$U = \frac{1}{x^2}.$$

Тогда $VU' = \frac{1}{x^2}$:

$$\frac{dV}{dx} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2},$$

$$dV = dx,$$

$$\int dV = \int dx,$$

$$V = x + C_1.$$

Следовательно, $z = UV = \frac{1}{x^2} (x + C_1) = \frac{1}{x} + \frac{C_1}{x^2}$,

так как $y = e^{\int z dx}$, то $y = e^{\int \frac{1}{x} + \frac{C_1}{x^2} dx} = e^{\ln |x| + C_1 (\frac{1}{x}) + C_2}$

$\Rightarrow y = x e^{\frac{C_1}{x}}$ — общее решение.

Ответ: $y = x e^{\frac{C_1}{x}}$.

§ 12. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка

Определение:

Линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка называется уравнение вида

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad (1)$$

где функции $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ непрерывны на некотором отрезке $[a; b]$.

При этих условиях существует единственное решение уравнения (1), удовлетворяющее заданным начальным условиям: $y'(x_0) = y_0$.

Функция $f(x)$ называется правой частью уравнения (1), а соответствующее уравнение называется также линейным дифференциальным уравнением второго порядка с правой частью. При $f(x) \equiv 0$ приходим к линейному однородному дифференциальному уравнению второго порядка

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (2)$$

Определение:

Функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ называются линейно независимыми на отрезке $[a; b]$, если тождество

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \equiv 0, \quad x \in [a; b] \quad (3)$$

имеет место тогда и только тогда, когда $C_1 = C_2 = 0$.

Если же существуют также числа C_1 и C_2 , из которых хотя бы одно число отлично от нуля, что для всех $x \in [a; b]$ имеет место тождество (3), то функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ называются линейно зависимыми на отрезке $[a; b]$.

О линейной зависимости или независимости функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ можно судить по определителю

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}, \quad \text{который называется определителем}$$

Вронского (Ю. Вронский - польский математик).

Теорема № 1

1) Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно зависимы на отрезке $[a; b]$, то $W[y_1, y_2] = 0$ для всех $x \in [a; b]$.

2) Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимы на отрезке $[a; b]$, решения дифференциального уравнения (2), то определитель Вронского этих функций отличен от нуля во всех точках отрезка $[a; b]$.

(без доказательства)

Определение:

Совокупность любых двух линейно независимых на отрезке $[a; b]$, частных решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения (2) определяет фундаментальную систему решений этого уравнения.

Теорема № 2 (структура общего решения уравнения (2))

Если два частных решения $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ уравнения (2) образуют на отрезке $[a; b]$ фундаментальную систему, то общим решением этого уравнения является функция

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \quad (4)$$

где C_1 и C_2 - произвольные постоянные.

Доказательство:

Подставим функцию $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ и ее производные в левую часть уравнения (2)

$$\begin{aligned} (C_1 y_1 + C_2 y_2)'' + p(x)(C_1 y_1 + C_2 y_2)' + q(x)(C_1 y_1 + C_2 y_2) &= 0, \\ C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + p(x)(C_1 y_1' + C_2 y_2') + q(x)(C_1 y_1 + C_2 y_2) &= 0, \\ C_1 (y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1) + C_2 (y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2) &= 0, \\ C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 &= 0. \end{aligned}$$

Так как функции y_1 и y_2 - решения уравнения (2) и, значит, выражения в скобках тождественно равны нулю.

Таким образом, функция $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ также является решением уравнения (2).

Остается доказать, что это решение общее, т. е. что из него можно выделить единственное частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad (5)$$

где $x \in [a; b]$.

Подставив начальные условия (5) в решение (4), получим систему уравнений:

$$\begin{cases} y_0 = C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) \\ y_0' = C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) \end{cases}$$

где $y_0 = y(x_0)$, $y'_0 = y'(x_0)$ с неизвестными C_1 и C_2 .

Составим определитель Вронского при $x = x_0$:

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y'_1(x_0) & y'_2(x_0) \end{vmatrix}.$$

Так как решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ образуют фундаментальную систему решений на $[a; b]$ и $x_0 \in [a; b]$, то, согласно теореме № 1, $W(x_0) \neq 0$. Поэтому система имеет единственное решение, определяемое по формулам Крамера:

$$\Delta = W(x_0),$$

$$\Delta_{C_1} = \begin{vmatrix} y_0 & y_2(x_0) \\ y'_0 & y'_2(x_0) \end{vmatrix}, \Delta_{C_2} = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_0 \\ y'_1(x_0) & y'_0 \end{vmatrix},$$

$$C_1 = \frac{\Delta_{C_1}}{\Delta}, C_2 = \frac{\Delta_{C_2}}{\Delta} = C_2^0.$$

Решение $y = C_1^0 y_1(x) + C_2^0 y_2(x)$ является частным решением уравнения (2), удовлетворяющее начальным условиям (5). Теорема доказана.

§ 13. Интегрирование линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка (ЛОДУ) с постоянными коэффициентами

Частным случаем рассмотренных выше линейных однородных дифференциальных уравнений являются ЛОДУ с постоянными коэффициентами

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \quad (1)$$

где a_1 и a_2 постоянны.

Для нахождения общего решения уравнения (1) достаточно найти два его частных решения, образующих фундаментальную систему.

Будем искать частные решения уравнения (1) в виде $y = e^{kx}$,

где k — некоторое число (предложено Л. Эйлером). Дифференцируем эту функцию два раза:

$$y' = e^{kx} (kx)' = k e^{kx}, \\ y'' = (k e^{kx})' = k (e^{kx})' = k e^{kx} (kx)' = k^2 e^{kx}.$$

Подставляем выражения y , y' , y'' в уравнение (1), получим

$$k^2 e^{kx} + a_1 k e^{kx} + a_2 e^{kx} = 0, \\ e^{kx} (k^2 + a_1 k + a_2) = 0,$$

так как $e^{kx} \neq 0$, то $k^2 + a_1 k + a_2 = 0$.

(2)

Уравнение (2) называется характеристическим уравнением дифференциального уравнения (1).

При решении характеристического уравнения (2) возможны следующие три случая.

Случай I.

Корни k_1 и k_2 уравнения (2) действительные и различные $k_1 \neq k_2$ ($D = a_1^2 - 4a_2 > 0$)

В этом случае частным решением уравнения (1) являются функции $y_1 = e^{k_1 x}$ и $y_2 = e^{k_2 x}$. Они образуют фундаментальную систему решений (линейно независимы), так как

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} \end{vmatrix} = e^{k_1 x} k_2 e^{k_2 x} - k_1 e^{k_1 x} e^{k_2 x} = \\ = e^{(k_1 + k_2)x} (k_2 - k_1) \neq 0.$$

Следовательно, общее решение уравнения (1) имеет вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

Пример: Решить уравнение $y'' + y' - 2y = 0$.

Решение:

Составим характеристическое уравнение

$$k^2 + k - 2 = 0,$$

$$D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9,$$

$$k = \frac{-1 \pm 3}{2 \cdot 1} \Rightarrow k_1 = -2, k_2 = 1.$$

Общее решение имеет вид $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x$.

Ответ: $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x$.

Случай 2.

Корни k_1 и k_2 характеристического уравнения (2) действительные и равные $k_1 = k_2$ ($D = a_1^2 - 4a_2 = 0$).

В этом случае имеем лишь одно частное решение: $y_1 = e^{k_1 x}$.

Покажем, что в качестве второго частного решения можно взять функцию $y_2 = x e^{k_1 x}$.

Дифференцируем эту функцию два раза:

$$y_1' = (x e^{k_1 x})' = x' e^{k_1 x} + x (e^{k_1 x})' = 1 \cdot e^{k_1 x} + x e^{k_1 x} (k_1 x)' =$$

$$= e^{k_1 x} + x e^{k_1 x} \cdot k_1 = e^{k_1 x} (1 + k_1 x),$$

$$y_1'' = (e^{k_1 x})' (1 + k_1 x) + e^{k_1 x} (1 + k_1 x)' = e^{k_1 x} (k_1 x)' (1 + k_1 x) +$$

$$+ e^{k_1 x} (0 + k_1) = k_1 e^{k_1 x} (1 + k_1 x) + k_1 e^{k_1 x} = e^{k_1 x} (2k_1 + k_1^2 x).$$

Подставляем выражение y_2 , y_2' , y_2'' в уравнение (1)

$$e^{k_1 x} (2k_1 + k_1^2 x) + a_1 e^{k_1 x} (1 + k_1 x) + a_2 e^{k_1 x} x = 0,$$

$$e^{k_1 x} (2k_1 + k_1^2 x + a_1 + a_1 k_1 x + a_2 x) = 0,$$

так как $e^{k_1 x} \neq 0$, то $x(k_1^2 + a_1 k_1 + a_2) + (2k_1 + a_1) = 0$.

Но $k_1^2 + a_1 k_1 + a_2 = 0$, так как k_1 есть корень уравнения (2);

$$2k_1 + a_1 = 0, \text{ так как по условию } k_1 = k_2 = \frac{-a_1 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = -\frac{a_1}{2} \Rightarrow 2k_1 = -a_1.$$

Поэтому $y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2 = 0$, т. е. функция $y_2 = x e^{k_1 x}$ является решением уравнения (1).

Частные решения $y_1 = e^{k_1 x}$ и $y_2 = x e^{k_1 x}$ образуют фундаментальную систему

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & x e^{k_1 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & e^{k_1 x} (1 + k_1 x) \end{vmatrix} = e^{2k_1 x} (1 + k_1 x) - e^{2k_1 x} k_1 x =$$

$$= e^{2k_1 x} (1 + k_1 x - k_1 x) = e^{2k_1 x} \neq 0.$$

Следовательно, в этом случае общее решение ЛОДУ (1) имеет вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x}.$$

Пример: Решить уравнение $y'' - 6y' + 9y = 0$.

Решение: Составим характеристическое уравнение

$$k^2 - 6k + 9 = 0,$$

$$D = 36 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0,$$

$$k_1 = k_2 = \frac{6 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = 3,$$

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} \text{ — общее решение}$$

Ответ: $y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$.

Случай 3.

Корни k_1 и k_2 уравнения (2) комплексные: $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$

$$(D = a_1^2 - 4a_2 < 0).$$

В этом случае частными решениями уравнения (1) являются функции $y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x}$ и $y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x}$

По формулам Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi$$

имеем

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{\alpha x + \beta x} = e^{\alpha x} e^{\beta x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x) = \\ &= e^{\alpha x} \cos \beta x + i e^{\alpha x} \sin \beta x, \\ y_2 &= e^{\alpha x - \beta x} = e^{\alpha x} e^{-\beta x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x) = \\ &= e^{\alpha x} \cos \beta x - i e^{\alpha x} \sin \beta x. \end{aligned}$$

Найдем два действительных частных решения уравнения (1). Для этого составим две линейные комбинации решений y_1 и y_2 :

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = e^{\alpha x} \cos \beta x = \bar{y}_1 \quad \text{и} \quad \frac{y_1 - y_2}{2i} = e^{\alpha x} \sin \beta x = \bar{y}_2.$$

Функции $\bar{y}_1$ и $\bar{y}_2$ являются решениями уравнения (1), что следует из теоремы № 2 § 12. Эти решения образуют фундаментальную систему

$$\begin{aligned} W[y_1, y_2] &= \begin{vmatrix} e^{\alpha x} \cos \beta x & e^{\alpha x} \sin \beta x \\ \alpha e^{\alpha x} \cos \beta x + \beta e^{\alpha x} (-\sin \beta x) & \alpha e^{\alpha x} \sin \beta x + \beta e^{\alpha x} \cos \beta x \end{vmatrix} = \\ &= e^{2\alpha x} (\alpha \cos \beta x \sin \beta x + \beta \cos^2 \beta x) - e^{2\alpha x} (\alpha \cos \beta x \sin \beta x - \beta \sin^2 \beta x) = \\ &= e^{2\alpha x} (\beta \cos^2 \beta x + \beta \sin^2 \beta x) = e^{2\alpha x} \beta (\cos^2 \beta x + \sin^2 \beta x) = e^{2\alpha x} \beta \neq 0. \end{aligned}$$

Поэтому общее решение уравнения (1) запишется в виде

$$y = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x \quad \text{или}$$

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

Пример: Решить уравнение $y'' - 6y' + 25y = 0$.

Решение:

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 - 6k + 25 = 0,$$

$$D = 36 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = -64,$$

$$k = \frac{6 \pm 8i}{2} \Rightarrow \begin{aligned} k_1 &= \frac{6+8i}{2} = 3+4i, \\ k_2 &= \frac{6-8i}{2} = 3-4i \end{aligned}$$

Общее решение уравнения имеет вид

$$y = e^{3x} (C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x).$$

Ответ: $y = e^{3x} (C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x)$.

§ 14. Интегрирование ЛОДУ n -го порядка ($n > 2$) с постоянными коэффициентами

Задача нахождения общего решения ЛОДУ n -го порядка ($n > 2$) с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y = 0, \quad (1)$$

где a_i ($i = 1, 2, \dots, n$) — числа, решается аналогично случаю уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Частные решения уравнения (1) также ищем в виде $y = e^{kx}$, где k — постоянное число.

Характеристическим для уравнения (1) является алгебраическое уравнение n -го порядка вида

$$k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \dots + a_{n-1} k + a_n = 0. \quad (2)$$

Уравнение (2) имеет n корней (в их числе могут быть и комплексные).

Замечание:

Не все из корней уравнения (2) обязаны быть различными.

Пример: Уравнение $(k-3)^2 = 0$ имеет два равных корня: $k_1 = k_2 = 3$.

В этом случае говорят, что корень один ($k = 3$) и имеет кратность $m_k = 2$.

Если кратность корня равна единице: $m_k = 1$, его называют простым.

Случай 1.

Все корни уравнения (2) действительны и просты (различны). Тогда функции $y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = e^{k_2 x}$, ..., $y_n = e^{k_n x}$ являются частными решениями уравнения (1) и образуют фундаментальную систему решений (линейно независимы).

Поэтому общее решение уравнения (1) записываем в виде

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \dots + C_n e^{k_n x}.$$

Пример:

Найти общее решение уравнения $y^{(4)} - 13y'' + 36y = 0$.

Решение:

Характеристическое уравнение имеет вид

$$k^4 - 13k^2 + 36 = 0.$$

Пусть $k^2 = t$, тогда $t^2 - 13t + 36 = 0$,

$$D = 169 - 4 \cdot 36 = 25,$$

$$t = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{matrix} t_1 = 9 \\ t_2 = 4 \end{matrix}$$

Следовательно, $k^2 = 9$ и $k^2 = 4$.

Корни этих уравнений $k_1 = 3$, $k_2 = -3$, $k_3 = 2$, $k_4 = -2$.

Общее решение $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} + C_3 e^{2x} + C_4 e^{-2x}$.

Ответ: $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} + C_3 e^{2x} + C_4 e^{-2x}$.

Случай 2.

Все корни характеристического уравнения действительные, но не все простые (есть корни, имеющие кратность $m > 1$). Тогда каждому простому корню k соответствует одно частное решение вида e^{kx} , а каждому корню k кратности $m > 1$ соответствует m частных решений: e^{kx} , $x e^{kx}$, $x^2 e^{kx}$, ..., $x^{m-1} e^{kx}$.

Пример: Найти общее решение уравнения $y''' - 2y'' + y' = 0$.

Решение:

Характеристическое уравнение имеет вид

$$k^3 - 2k^2 + k = 0,$$

$$k(k^2 - 2k + 1) = 0,$$

$$k = 0 \text{ или } k^2 - 2k + 1 = 0, \quad (k-1)^2 = 0,$$

корень $k = 1$ кратности $m_k = 2$.

Корни этого уравнения $k_1 = 0$, $k_2 = k_3 = 1$.

Общее решение: $y = C_1 e^{0x} + C_2 e^{1x} + C_3 x e^{1x} = C_1 + e^x (C_2 + C_3 x)$.

Ответ: $y = C_1 + e^x (C_2 + C_3 x)$.

Случай 3.

Среди корней уравнения (2) есть комплексные сопряженные корни. Тогда каждой паре $\alpha \pm i\beta$ простых комплексно-сопряженных корней соответствует два частных решения $e^{\alpha x} \cos \beta x$ и $e^{\alpha x} \sin \beta x$, а каждой паре $\alpha \pm i\beta$ корней кратности $m > 1$ соответствует $2m$ частных решения вида

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, x e^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, x^{m-1} e^{\alpha x} \cos \beta x;$$

$$e^{\alpha x} \sin \beta x, x e^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, x^{m-1} e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Эти решения образуют фундаментальную систему решений.

Пример: Решить уравнение $y^{(5)} + y^{(4)} + 2y''' + 2y'' + y' + y = 0$.

Решение:

Характеристическое уравнение имеет вид

$$k^5 + k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k + 1 = 0,$$

$k = -1$ является корнем данного уравнения.

Понизим степень уравнения на единицу, для этого разделим уравнение на $(k+1)$ по правилу деления многочлена на многочлен:

$$\begin{array}{r} -k^3 + k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k + 1 = 0 \quad |k+1|, \\ k^3 + k^4, \quad |k^4 + 2k^2 + 1, \\ \hline -0 + 2k^3 + 2k^2 + k + 1, \\ \hline 2k^3 + 2k^2, \\ \hline -0 + k + 1, \\ \hline k + 1, \\ \hline 0. \end{array}$$

Уравнение примет вид $(k+1)(k^4 + 2k^2 + 1) = 0$.

Следовательно, $(k+1)(k^2 + 1)^2 = 0$.

Корни характеристического уравнения $k_1 = -1$, $k_2 = i$, $k_3 = -i$,

$k_4 = i$, $k_5 = -i$.

Общее решение

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x + C_4 x \cos x + C_5 x \sin x.$$

Ответ: $y = C_1 e^{-x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x + C_4 x \cos x + C_5 x \sin x$.

§ 15. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения (ЛНДУ) второго порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим ЛНДУ второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x), \quad (1)$$

где a_1 и a_2 — постоянные коэффициенты, $f(x)$ — заданная, непрерывная на $(a; b)$ функция.

Уравнение

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \quad (2)$$

левая часть которого совпадает с левой частью ЛНДУ (1), называется соответствующим ему однородным уравнением.

Теорема (структура общего решения ЛНДУ).

Общим решением у уравнения (1) является сумма его произвольного частного решения y^* и общего решения $\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2$ соответствующего однородного уравнения (2), т. е.

$$y = y^* + \bar{y} \quad (3)$$

Доказательство:

Убедимся, что функция (3) — решение уравнения (1). Так как y^* есть решение уравнения (1), а $\bar{y}$ — решение уравнения (2), то

$$(y^*)'' + a_1 (y^*)' + a_2 y^* = f(x) \text{ и } (\bar{y})'' + a_1 (\bar{y})' + a_2 \bar{y} = 0.$$

В таком случае имеем

$$(\bar{y} + y^*)'' + a_1 (\bar{y} + y^*)' + a_2 (\bar{y} + y^*) = f(x).$$

Перегруппируем члены левой части уравнения

$$((\bar{y})'' + a_1 (\bar{y})' + a_2 (\bar{y})) + ((y^*)'' + a_1 (y^*)' + a_2 (y^*)) = f(x),$$

$$f(x) + 0 = f(x),$$

$$f(x) = f(x) - \text{тождество}.$$

Это означает, что функция $y^* + \bar{y}$ является решением уравнения (1). Покажем теперь, что функция

$$y = y^* + C_1 y_1 + C_2 y_2 \quad (4)$$

является общим решением уравнения (1). Для этого надо доказать, что из решения (4) можно выделить единственное частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям,

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0'. \quad (5)$$

Продифференцировав функцию (4) и подставив начальные условия (5) в функцию (4) и ее производную, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + y^*(x_0) = y_0 \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + (y^*)'(x_0) = y_0' \end{cases}$$

где $y_0 = y(x_0)$, $y_0' = y'(x_0)$.

Следовательно,

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = y_0 - y^*(x_0) \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = y_0' - (y^*)'(x_0) \end{cases}$$

В данной системе неизвестными являются C_1 и C_2 .

Определителем этой системы является определитель Вронского $W(x_0)$ для функции $y_1(x)$, $y_2(x)$ в точке $x = x_0$.

Функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимы (образуют фундаментальную систему решений), т. е. $W(x_0) \neq 0$.

Следовательно, система имеет единственное решение:

$$C_1 = C_1^0 \text{ и } C_2 = C_2^0.$$

Решение $y = y^* + C_1^0 y_1(x) + C_2^0 y_2(x)$ является частным решением уравнения (1), удовлетворяющим заданным начальным условиям (5).

Теорема доказана.

Рассмотрим два случая метода подбора частного решения ЛНДУ (1).

Случай 1.

$$f(x) = e^{\alpha x} P_n(x), \text{ где } P_n(x) - \text{многочлен степени } n.$$

а) Если α не является корнем характеристического уравнения

$$k^2 + a_1 k + a_2 = 0, \quad (6)$$

то частное решение y^* ищем в виде $y^* = e^{\alpha x} Q_n(x)$, где $Q_n(x)$ — многочлен степени n с неизвестными коэффициентами.

б) Если α — корень уравнения (6) кратности m , то частное решение y^* ищем в виде $y^* = x^m e^{\alpha x} Q_n(x)$.

Частный случай:

Если $f(x) = P_n(x)$, т. е. $\alpha = 0$, то:

1) при $\alpha = 0$ и не являющимся корнем характеристического уравнения $y^* = Q_n(x)$;

2) при $\alpha = 0$ и являющимся корнем кратности m характеристического уравнения $y^* = x^m Q_n(x)$

Случай 2.

$$f(x) = e^{\alpha x} [P_n(x) \cos \beta x + Q_l(x) \sin \beta x], \text{ где } P_n(x) \text{ и } Q_l(x) - \text{многочлены степени } n \text{ и } l, \text{ соответственно.}$$

Положим $N = \max(n, l)$.

а) Если $\alpha \pm i\beta$ не являются корнями уравнения (6), то

$$y^* = e^{\alpha x} [P_N(x) \cos \beta x + Q_N(x) \sin \beta x];$$

б) Если $\alpha \pm i\beta$ — корни уравнения (6) кратности m , то

$$y^* = x^m e^{\alpha x} [P_N(x) \cos \beta x + Q_N(x) \sin \beta x].$$

Частный случай:

Если $f(x) = a \cos \beta x + b \sin \beta x$, т. е. $\alpha = m = l = 0$, то частное решение ищем в виде $y^* = A \cos \beta x + B \sin \beta x$ (если числа $\pm i\beta$ не являются корнями характеристического уравнения), или в виде $y^* = x(A \cos \beta x + B \sin \beta x)$ (если числа $\pm i\beta$ — корни характеристического уравнения).

Теорема (о наложении решений)

Если y_1^* и y_2^* — частные решения соответственно уравнений $y'' + a_1 y' + a_2 y = f_1(x)$ и $y'' + a_1 y' + a_2 y = f_2(x)$, то функция $y^* = y_1^* + y_2^*$ — частное решение уравнения

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f_1(x) + f_2(x)$$

(без доказательства).

Пример: Решить дифференциальное уравнение

$$y'' - 4y' + 3y = xe^x + 2 \cos x$$

Решение:

Так как $f(x) = xe^x + 2 \cos x$, то $f_1(x) = xe^x$ и $f_2(x) = 2 \cos x$.

Решение уравнения будем искать в виде $y = y_1^* + y_2^* + y^*$.

Соответствующее однородное уравнение $y'' - 4y' + 3y = 0$.

Характеристическое уравнение $k^2 - 4k + 3 = 0$

Находим $k_1 = 3$ и $k_2 = 1$.

Откуда $\bar{y} = C_1 e^{3x} + C_2 e^x$

1) Рассмотрим $f_1(x) = xe^x$. В общем виде $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$,

где $P(x) = x$ — многочлен первой степени, $\alpha = 1$ — является корнем характеристического уравнения кратности $m = 1$. Значит, частное решение ищем в виде

$$\begin{aligned} y_1^* &= x(Ax + B)e^x = (Ax^2 + Bx)e^x, \\ (y_1^*)' &= (2Ax + B)e^x + (Ax^2 + Bx)(e^x)' = e^x(Ax^2 + 2Ax + Bx + B), \\ (y_1^*)'' &= (e^x)'(Ax^2 + 2Ax + Bx + B) + e^x(2Ax + 2A + B) = \\ &= e^x(Ax^2 + 4Ax + Bx + 2B + 2A). \end{aligned}$$

Подставляем $(y_1^*)''$, $(y_1^*)'$, y_1^* в исходное уравнение и приравниваем к правой части $f_1(x)$:

$$\begin{aligned} e^x(Ax^2 + 4Ax + Bx + 2B + 2A) - 4e^x(Ax^2 + 2Ax + Bx + B) + \\ + 3e^x(Ax^2 + Bx) = xe^x. \end{aligned}$$

Так как $e^x \neq 0$, то разделим все части уравнения на e^x и приведем подобные слагаемые.

Получим: $-2B + 2A - 4Ax = x$.

Приравниваем коэффициенты при соответствующих степенях x в левой и правой части полученного равенства

$$\begin{aligned} x^1 | -4A = 1 &\Rightarrow A = -\frac{1}{4}, B = -\frac{1}{4}, \\ x^0 | -2B + 2A = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Следовательно, } y_1^* = \left(-\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x\right)e^x = -\frac{e^x}{4}(x^2 + x).$$

2) Рассмотрим $f_2(x) = 2 \cos x$. В общем виде $f(x) = a \cos \beta x + b \sin \beta x$, где $a = 2$, $b = 0$, $\beta = 1$.

Числа $\pm i\beta = \pm i$ не являются корнями характеристического уравнения, значит, частное решение ищем в виде

$$\begin{aligned} y_2^* &= A \cos x + B \sin x, \\ (y_2^*)' &= -A \sin x + B \cos x, \\ (y_2^*)'' &= -A \cos x - B \sin x. \end{aligned}$$

Подставим $(y_2^*)''$, $(y_2^*)'$, y_2^* в исходное уравнение и приравниваем к правой части $f_2(x)$.

$$\begin{aligned} -A \cos x - B \sin x - 4(-A \sin x + B \cos x) + 3(A \cos x + B \sin x) &= 2 \cos x, \\ 2A \cos x + 2B \sin x + 4A \sin x - 4B \cos x &= 2 \cos x, \\ \cos x | 2A - 4B = 2 &\Rightarrow A = \frac{1}{5}, B = -\frac{2}{5}, \\ \sin x | 2B + 4A = 0 \end{aligned}$$

Следовательно, $y_2^* = \frac{1}{5} \cos x - \frac{2}{5} \sin x$.

Общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = -\frac{e^x}{4}(x^2 + x) + \frac{1}{5} \cos x - \frac{2}{5} \sin x + C_1 e^{3x} + C_2 e^x.$$

Ответ: $y = -\frac{e^x}{4}(x^2 + x) + \frac{1}{5} \cos x - \frac{2}{5} \sin x + C_1 e^{3x} + C_2 e^x$.

§ 16. Метод вариации произвольных постоянных для определения частного решения ЛНДУ

Рассмотрим ЛНДУ второго порядка

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x), \quad (1)$$

где $a_1(x)$, $a_2(x)$, $f(x)$ — заданные, непрерывные на $(a; b)$ функции.

Его общим решением является функция

$$y = y^* + \bar{y} \quad (2)$$

В общем случае, в том числе тогда, когда правая часть ЛНДУ имеет вид, на предусмотренный предыдущим параграфом, для отыскания частного решения используют метод вариации (т. е. изменения) произвольных постоянных (или метод Лагранжа).

Суть его в следующем. Пусть $\bar{y} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ — общее решение соответствующего ЛНДУ однородного уравнения

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0. \quad (3)$$

Заменим в общем решении постоянные C_1 и C_2 неизвестными функциями $C_1(x)$ и $C_2(x)$ и подберем их так, чтобы функция

$$y^* = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) \quad (4)$$

была решением уравнения (1). Найдем производную

$$(y^*)' = C_1'(x)y_1(x) + C_1(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2(x) + C_2(x)y_2'(x) \quad (5)$$

Подберем функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ так, чтобы

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0.$$

Тогда $(y^*)' = C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)$,

$$(y^*)'' = C_1'(x)y_1'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_2(x)y_2''(x).$$

Подставляя выражение для y^* , $(y^*)'$, $(y^*)''$ в уравнение (1), получим:

$$\begin{aligned} & C_1'(x)y_1'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_2(x)y_2''(x) + \\ & + a_1(x)[C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)] + a_2(x)[C_1(x)y_1(x) + \\ & + C_2(x)y_2(x)] = f(x), \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & C_1(x)[y_1''(x) + a_1(x)y_1'(x) + a_2(x)y_1(x)] + \\ & + C_2(x)[y_2''(x) + a_1(x)y_2'(x) + a_2(x)y_2(x)] + \\ & + C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x). \end{aligned}$$

Поскольку $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — решения уравнения (3), то выражения в квадратных скобках равны нулю, а поэтому

$$C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x). \quad (6)$$

Таким образом, функция (4) будет частным решением y^* уравнения (1), если функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ удовлетворяют системе уравнений (5) и (6):

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x). \end{cases} \quad (7)$$

Определитель системы $\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$, так как это определитель

Вронского для фундаментальной системы частных решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения (3).

Поэтому система (7) имеет единственное решение:

$$C_1''(x) = \varphi_1(x) \text{ и } C_2''(x) = \varphi_2(x),$$

где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — некоторые функции от x . Интегрируя эти функции, находим $C_1(x)$ и $C_2(x)$, а затем по формуле (4) составим частное решение уравнения (1).

Пример: Решить дифференциальное уравнение $y'' + y = \operatorname{tg} x$.

Решение:

Соответствующее однородное уравнение имеет вид $y'' + y = 0$.

Характеристическое уравнение $k^2 + 1 = 0$.

Находим $k_1 = i$ и $k_2 = -i$.

Следовательно, $\bar{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Найдем теперь частное решение y^* исходного уравнения. Оно ищется в виде $y^* = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x$. Для нахождения $C_1(x)$ и $C_2(x)$ составим систему уравнений вида (7):

$$\begin{cases} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0 \\ C_1'(x) (-\sin x) + C_2'(x) \cos x = \operatorname{tg} x \end{cases}$$

Решаем ее:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

$$\Delta_{C_1(x)} = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \operatorname{tg} x & \cos x \end{vmatrix} = -\operatorname{tg} x \sin x = -\frac{\sin^2 x}{\cos x},$$

$$\Delta_{C_2(x)} = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \operatorname{tg} x \end{vmatrix} = \cos x \operatorname{tg} x = \sin x.$$

$$C_1' = \frac{\Delta_{C_1(x)}}{\Delta} = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}; \quad C_2' = \frac{\Delta_{C_2(x)}}{\Delta} = \sin x,$$

$$C_1(x) = \int C_1'(x) dx = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx = \int \frac{\cos^2 x - 1}{\cos x} dx =$$

$$= \int \cos x dx - \int \frac{dx}{\cos x} = \sin x + \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1} \right|,$$

$$\begin{aligned} \text{так как } \int \frac{dx}{\cos x} &= x = 2 \operatorname{arctg} t \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \left| \frac{dx}{dt} = \frac{2dt}{1+t^2} \right| \\ &= \int \frac{2}{1+t^2} \frac{1+t^2}{1-t^2} dt = \int \frac{2}{1-t^2} dt = \end{aligned}$$

$$= -2 \int \frac{dt}{t^2 - 1} = -2 \int \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \int \frac{dt}{t+1} - \int \frac{dt}{t-1} =$$

$$= \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right| = \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1} \right|,$$

$$C_2(x) = \int C_2'(x) dx = \int \sin x dx = -\cos x.$$

Запишем частное решение данного уравнения

$$y^* = \sin x \cos x + \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1} \right| \cos x - \cos x \sin x = \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1} \right| \cos x.$$

Следовательно, общее решение данного уравнения имеет вид

$$y = y^* + \bar{y} = \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1} \right| + C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

$$\text{Ответ: } y = \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1} \right| \cos x + C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

§ 17. Интегрирование ЛНДУ n -го порядка ($n > 2$) с постоянными коэффициентами

Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами порядка $n > 2$

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$$

решаются аналогично уравнениям второго порядка.

Соответствующее ему однородное уравнение имеет вид

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$k^n + a_1 k^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} k + a_n = 0.$$

Теорема (о структуре общего решения ЛНДУ n -го порядка)

Общее решение y ЛНДУ n -го порядка равно сумме частного решения y^* неоднородного уравнения и y соответствующего ему однородного уравнения, т. е.

$$y = y^* + \bar{y}$$

(без доказательства).

Частное решение y^* ЛНДУ n -го порядка может быть найдено, если известно общее решение $\bar{y}$ однородного уравнения, методом вариации произвольных постоянных. Оно ищется в виде

$$y^* = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \dots + C_n(x)y_n(x),$$

где $y_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) — частные решения, образующие фундаментальную систему однородного уравнения

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 + \dots + C_n'y_n = 0, \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' + \dots + C_n'y_n' = 0, \\ C_1'y_1'' + C_2'y_2'' + \dots + C_n'y_n'' = 0, \\ \dots \dots \dots \\ C_1'y_1^{(n-1)} + C_2'y_2^{(n-1)} + \dots + C_n'y_n^{(n-1)} = 0. \end{cases}$$

Если же правая часть $f(x)$ имеет специальный вид, описанный в § 15, то частное решение y^* может быть найдено методом неопределенных коэффициентов.

Пример: Решить уравнение $y^{(4)} - y' = 2x$.

Решение:

Соответствующее однородное уравнение: $y^{(4)} - y' = 0$.

Характеристическое уравнение

$$k^4 - k = 0,$$

$$k(k-1)(k^2 + k + 1) = 0,$$

$$k_1 = 0, k_2 = 1, k_{3,4} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$y = C_1 e^{0 \cdot x} + C_2 e^{1 \cdot x} + C_3 e^{\frac{1}{2}x} (C_3 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_4 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x).$$

Находим y^* : $f(x) = 2x$. Это означает, что правая часть вида $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$, $P(x) = 2x$ — многочлен первой степени, а $\alpha = 0$ является корнем характеристического уравнения кратности $m = 1$. Значит, частное решение ищем в виде

$$y^* = x e^{0 \cdot x} (Ax + B) = Ax^2 + Bx,$$

$$(y^*)' = 2Ax + B,$$

$$(y^*)'' = 2A,$$

$$(y^*)''' = 0,$$

$$(y^*)^{(4)} = 0.$$

Подставим $(y^*)'$, $(y^*)''$ в исходное уравнение

$$0 - (2Ax + B) = 2x/$$

Отсюда $A = 1$, $B = 0$, и получаем $y^* = x^2$. Следовательно, функция

$$y = \bar{y} + y^* = C_1 + C_2 e^x + e^{\frac{x}{2}} (C_3 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_4 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x) - x^2$$

является общим решением уравнения.

$$\text{Ответ: } y = C_1 + C_2 e^x + e^{\frac{x}{2}} (C_3 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_4 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x) - x^2.$$

§ 18. Системы дифференциальных уравнений

Определение:

Системой дифференциальных уравнений называется совокупность дифференциальных уравнений, каждое из которых содержит независимую переменную, искомые функции и их производные.

Общий вид системы дифференциальных уравнений первого порядка, содержащей n искомым функций $y_1, y_2, \dots, y_n$ следующий:

[illegible]

Определение:

Система дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производной, т. е. система вида:

[illegible]

называется нормальной системой дифференциальных уравнений. При этом предполагается, что число уравнений равно числу искомых функций.

Определение:

Решением системы (1) называется совокупность из n функций u_i ,

..., Y_n , удовлетворяющих каждому из уравнений этой системы.

Начальные условия для системы (1) имеют вид

$$y_1(x_0) = y_1^0, y_2(x_0) = y_2^0, \dots, y_n(x_0) = y_n^0.$$

Одним из основных методов интегрирования нормальной системы дифференциальных уравнений является метод сведения системы к одному дифференциальному уравнению высшего порядка.

Рассмотрим технику этого метода на конкретном примере.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = 4y - 3z, \\ \frac{dz}{dx} = 2y - 3z. \end{array} \right.$$

Пример: Решить систему уравнений

Решение:

Продифференцируем первое уравнение $y'' = 4y' - 3z'$. Подставляем $z' = 2y - 3z$ в полученное равенство

$$y'' = 4y' - 3(2y - 3z) = 4y' - 6y + 9z$$

Из первого уравнения системы выражаем z через u и u' ,

$$z = \frac{4y - y'}{3}.$$

Подставляем значения в уравнение (*)

$$y'' = 4y' - 6y + 9 \frac{4y - y'}{3},$$

$$y'' = 4y' - 6y + 12y - 3y',$$

$$y'' - y' - 6y = 0,$$

Получили одно $ЮДУ$ второго порядка. Решаем его!

$$k^2 - k - 6 = 0,$$

$$k_1 = -2, k_2 = 3.$$

Следовательно, $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}$ — общее решение уравнения.
Находим функцию z :

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{3}(4(C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}) - (C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x})') = \\ &= \frac{1}{3}(4C_1 e^{-2x} + 4C_2 e^{3x} + 2C_1 e^{-2x} - 3C_2 e^{3x}) = \\ &= \frac{1}{3}(6C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}) = 2C_1 e^{-2x} + \frac{1}{3}C_2 e^{3x}. \end{aligned}$$

Таким образом, общее решение данной системы уравнений имеет

вид: $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}$, $z = 2C_1 e^{-2x} + \frac{1}{3} C_2 e^{3x}$.

Onisem:

$$\begin{cases} y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}, \\ z = 2C_1 e^{-2x} + \frac{1}{3} C_2 e^{3x}. \end{cases}$$

Список экзаменационных вопросов

1. Общие сведения о дифференциальных уравнениях.
2. Дифференциальные уравнения первого порядка (основные понятия).
3. Уравнение с разделяющимися переменными.
4. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.
5. Дифференциальные уравнения первого порядка, приводящиеся к однородным.
6. Линейные уравнения первого порядка.
7. Уравнения Я. Бернулли.
8. Уравнение в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.
9. Уравнение Лагранжа.
10. Уравнение Клеро.
11. Дифференциальные уравнения второго порядка (основные понятия).
12. Уравнения, допускающие понижения порядка.
13. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка.
14. Интегрирование линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка (ЛОДУ) с постоянными коэффициентами.
15. Интегрирование ЛОДУ n -го порядка ($n > 2$) с постоянными коэффициентами.
16. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения (ЛНДУ) второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.
17. Метод вариации произвольных постоянных для определения частного решения ЛНДУ.
18. Интегрирование ЛНДУ n -го порядка ($n > 2$) с постоянными коэффициентами.
19. Системы дифференциальных уравнений.

Библиографический список

1. Высшая математика для экономистов: Учебное пособие для вузов/ Под редакцией проф. Н. Ш. Кремера. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997.
2. Красс М. С. Математика для экономических специальностей: учебник. – М.: ИНФРА-М, 1998. – 464 с.
3. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления для вузов. – Том 2: Учебное пособие для вузов. – М.: Наука, 1985. – 560 с.
4. Бутров Я. С., Никольский С. М. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Краткие интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного: Учебник. – М.: Наука, 1985. – 464 с.
5. Краснов М. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения: Учебное пособие. – М.: Высшая школа, 1983. – 128 с.
6. Понтрягин Л. С. Знакомство с высшей математикой. Дифференциальные уравнения и их приложения. – М.: Наука, 1988. – 208 с.
7. Кузнецов Л. А. Сборник заданий по высшей математике (типичные расчеты): Учебное пособие. – М.: Высшая школа, 1983. – 175 с.
8. Сборник задач по высшей математике. II курс/ К. Н. Лунгу, В. П. Норин, Д. Т. Писменный, Ю. А. Шевченко; Под редакцией С. Н. Федина. – М.: Айрис-пресс, 2004. – 592 с.

Оглавление

§1. Общие сведения о дифференциальных уравнениях	3
§2. Дифференциальные уравнения первого порядка (основные понятия)	4
§3. Уравнение с разделяющимися переменными	6
§4. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка	10
§5. Дифференциальные уравнения первого порядка, приводящиеся к однородным	14
§6. Линейные уравнения первого порядка	18
§7. Уравнения Я. Бернулли	24
§8. Уравнение в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель	29
§9. Уравнение Лагранжа и Клеро	34
§10. Дифференциальные уравнения высших порядков	37
§11. Уравнения, допускающие понижения порядка	39
§12. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка	45
§13. Интегрирование линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка (ЛОДУ) с постоянными коэффициентами	48
§14. Интегрирование ЛОДУ n -го порядка ($n > 2$) с постоянными коэффициентами	53
§15. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения (ЛНДУ) второго порядка с постоянными коэффициентами	56
§16. Метод вариации произвольных постоянных для определения частного решения ЛНДУ	61
§17. Интегрирование ЛНДУ n -го порядка ($n > 2$) с постоянными коэффициентами	65
§18. Системы дифференциальных уравнений	67
Список экзаменационных вопросов	70
Библиографический список	71

Марина Владимировна Тимошенко

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Курс лекций

Техн. редактор А.В. Миних

Издательство Южно-Уральского государственного университета

Подписано в печать 18.01.2006. Формат 60×84 1/16.

Печать офсетная. Усл. печ. л. 4,18. Уч.-изд. л. 4,29. Тираж 100 экз.
Заказ 550/316. Цена 18 р.

Отпечатано в типографии Издательства ЮУрГУ,
454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76.