Саитгараев С.С.

Исследование операций

Разделы для самостоятельного изучения для студентов дневного отделения ЭТФ ЮУрГУ, 2 курс.

Миасс

2009

519.8

С 14

Саитгараев С.С.Исследование операцийРазделы для самостоятельного изучения для студентовдневного отделения ЭТФ ЮУрГУ, 2 курс. / Саитгараев С.С..- Миасс: Этф, 2009.- 11 с.

1.3.2. Математическая структура модели и ее содержательная интерпретация

Работая с моделями, необходимо иметь в виду, что одни и те же математические модели и методы могут быть использованы для решения совершенно различных экономических задач. То есть, следует различать математическую структуру модели и ее содержательную интерпретацию. Рассмотрим следующие два простых примера.

Пример 1.1. Требуется определить, какую сумму следует положить в банк при заданной ставке процента (20% годовых), чтобы через год получить 12000 ден. ед.?

Введем формальные обозначения для величин, фигурирующих в задаче:

Mo, Mk – начальная и конечная суммы денег, соответственно;

R - ставка процента

записывая соотношение между ними

$M_k = M_o \cdot [1 + R/100]$

найдем требуемую величину из решения основного уравнения модели

$$M_0 = \frac{Mk}{1 + R/100} = \frac{12000}{1{,}2} = 10000 \text{ денежных единиц}$$

Пример 1.2. Пусть требуется определить, каков был объем выпуска продукции завода, если в результате технического перевооружения средняя производительность труда увеличилась на 20%, и завод стал выпускать 12000 единиц продукции.

Введем формальные обозначения для величин, фигурирующих в задаче:

Q_o, Q_k - начальный и конечный объемы выпуска продукции,

R - процент прироста производительности труда,

записывая соотношение между ними $Q_k = Q_o \cdot [1 + R/100]$

найдем искомую величину из решения основного уравнения модели

$$Q_0 = \frac{Qk}{1 + R/100} = \frac{12000}{1{,}2} = 10000 \text{ единиц продукции}$$

Сравнивая полученные модели и результаты по обоим примерам, мы можем заметить, что математическая форма модели

$X_k = X_o (1 + R/100)$

и даже числовые значения входящих в нее величин в обоих случаях одинаковы, однако экономическая ситуация, описываемая моделью, экономическая интерпретация модели и результатов расчета совершенно различны, т.е. модели, имея одинаковую математическую структуру, различаются по содержательной интерпретации.

Таким образом, одни и те же математические модели и методы могут быть использованы для решения совершенно различных экономических задач.

1.3.3. Основные типы экономических моделей [21/17]

Математические модели, используемые в экономике, по ряду признаков, относящихся к особенностям моделируемого объекта, цели моделирования и используемого инструментария можно разделить на следующие классы:

Макроэкономические модели описывают экономику страны, региона, отрасли, как единое целое, связывая между собой укрупненные материальные и финансовые показатели: ВВП, потребление, инвестиции, занятость, процентную ставку, количество денег и другие.

Микроэкономические модели описывают взаимодействие структурных и функциональных составляющих экономики, либо поведение отдельной такой составляющей в рыночной среде. Вследствие разнообразия типов экономических элементов и форм их взаимодействия на рынке, микроэкономическое моделирование занимает основную часть экономико-математической теории. Наиболее серьезные теоретические результаты в микроэкономическом моделировании в последние годы получены в исследовании стратегического поведения фирм в условиях олигополии с использованием аппарата теории игр.

Теоретические модели позволяют изучать общие свойства экономики и ее характерных элементов дедукцией выводов из формальных предпосылок.

Прикладные модели дают возможность оценить параметры функционирования конкретного экономического объекта и сформулировать рекомендации для принятия практических решений. К прикладным относятся прежде всего эконометрические модели, оперирующие числовыми значениями экономических переменных и позволяющие статистически значимо оценивать их на основе имеющихся наблюдений.

Равновесные модели описывают такие состояния экономики, когда результирующая всех сил, стремящихся вывести ее из данного состояния, равна нулю, когда ни один из экономических субъектов не заинтересован в изменении состоянии объекта с помощью средств, которыми он располагает.

Равновесные модели занимают особое место в рыночной экономике. В нерыночной экономике неравновесие по одним параметрам (например, дефицит) компенсируется другими факторами (черный рынок, очереди и т.п.). Равновесные модели дескриптивны, описательны.

Статические модели описывают состояние экономического объекта в конкретный момент или период времени. В статических моделях обычно зафиксированы значения ряда величин, являющихся переменными в динамике, - например, капитальных ресурсов, цен и т.п.

Динамические модели включают взаимосвязи переменных во времени.. Динамическая модель не сводится к простой сумме ряда статических, а описывает силы и взаимодействия в экономике, определяющие ход процессов в ней. Динамические модели обычно используют аппарат дифференциальных и разностных уравнений, вариационного исчисления.

Детерминированные модели предполагают жесткие функциональные связи между переменными модели, а *стохастические модели* допускают наличие случайных воздействий на исследуемые параметры.

1.3.4. Имитационное моделирование

Развитие системных исследований как науки, обусловленное усложнением существующих и возникновением новых систем и новых научно-технических проблем, сопровождается ростом требований к средствам моделирования изучаемых процессов. Все более часты случаи, когда не удается построить математическую модель, отражающую реальные события во всей их сложности, или когда построенная модель приводит к таким задачам, которые находятся на грани неразрешимости.

Здесь на помощь исследователю приходит электронно-вычислительная техника с ее возможностями провести численный эксперимент, накопить статистические данные, оперативно дать разные варианты решений. Математические модели и методы приобретают новое важное качество – становятся основой математического обеспечения моделирующих комплексов.

[cc]Однако, оснащение исследовательских учреждений современной вычислительной техникой не заменяет собой знаний, опыта, искусства человека. То есть, возникла необходимость рационального сочетания возможностей ЭВМ по хранению, переработке большого объема информации, оперативного проведения многовариантных расчетов со способностью человека мыслить, анализировать, принимать решения. Как говорил Ч. Хитч: «Машине надо поручать то, что нужно считать, а человеку – то, над чем надо думать».

Эта потребность привела к созданию новых методологических подходов к проблеме разработки и применения моделей в системных, в том числе экономических исследованиях, наиболее распространенным среди которых .является ***имитационное моделирование*** с активным использованием диалога между человеком (как оперирующей стороной) и ЭВМ.

Термин «имитационное» происходит от латинского imititio (копирование, подражание) и выражает стремление оценить расчетным путем и своевременно учесть последствия возможных изменений обстановки, в которой функционирует (или будет функционировать) данная система.

Под ***имитацией*** *в данном случае следует понимать численный метод проведения на ЭВМ экспериментов с математическими моделями, описывающими поведение сложной системы для определения интересующих нас функциональных характеристик.*

Математический аппарат, применяемый в имитационном моделировании, практически ничем не ограничен. Так, для описания отдельных частей системы могут быть использованы аналитические подходы, для описания других частей – алгоритмические или даже эвристические. Однако в основе имитационного моделирования как экспериментального метода лежит моделирование случайных явлений. В результате имитации получаются статистические выводы, которые позволяют оценить те или иные характеристики системы.

Важной составляющей имитационного моделирования можно считать, так называемые, *диалоговые системы*, которые позволяют исследователю значительно расширить свои аналитические средства, повысить качество и обоснованность проектных решений, а также существенно сократить сроки их выработки. ***Диалоговые системы*** называются так именно потому, что между исследователем и ЭВМ осуществляется **«диалог»:** *человек не только вводит данные в машину и получает готовое решение, но может изменять условия в ходе моделирования и корректировать этот процесс.*

[13/с.15] Диалоговый режим общения исследователя (или другого представителя оперирующей стороны) с вычислительным комплексом, включающий периодический обмен информацией между участниками диалога в форме вопросов, ответов, указаний позволяет в наибольшей степени использовать опыт и интуицию специалистов.

Диалоговые системы позволяют работать с единой моделью (вводить в нее новые исходные данные, вносить коррективы и т. д.) как различным «узким» специалистам-проектировщикам отдельных подсистем, так и системным аналитикам. Причем ЭВМ сама варьирует эти данные и выдает варианты решения, из которых исследователи могут выбрать наиболее подходящие для данного случая варианты (принятие решения остается, конечно, за человеком). Исследователь может, кроме того, «вызвать» из памяти ЭВМ нужные ему данные. Целостная же модель исследуемой системы постоянно хранится в машине в течение всего процесса исследования. Все это существенно облегчает работу системного аналитика.

Появление имитационного моделирования и превращение его в эффективное средство анализа сложных систем было, с одной стороны, обусловлено *потребностями практики*, а с другой стороны, обеспечено *развитием метода статистических испытаний* (метод Монте-Карло), открывшего возможность моделирования случайных факторов, которыми изобилуют реальные системы, а также *развитием электронной вычислительной техники*, являющейся базой для проведения статистических экспериментов.

[6/с.364] Успешное использование вычислительных машин в анализе тесно связано с созданием математической модели. Однако, необходимо отметить, что, если для данной проблемы или хотя бы для ее части нельзя построить модель, то вычислительная машина бесполезна. *Вычислительная* *машина при современном понимании того, как она может быть использована, не может помочь решению проблемы, которую теоретически нельзя решить без ее помощи.*

Вычислительная машина не является универсальным средством. То, что в данном исследовании использовалась вычислительная машина, не является гарантией его качества. *Достоверность результата не выше достоверности модели, с которой работала вычислительная машина*.

Факт использования в анализе вычислительной машины может свидетельствовать о том, что проблема была изучена детально, что были рассмотрены разнообразные возможности. Но он ничего не говорит о качестве этого исследования.

[12/с.148] В последнее время все большее распространение получают, так называемые, *имитационные игры*, проходящие с непосредственным участием специалистов. В этом случае модель, испытываемая на вычислительной машине, представляет управляемую систему, а люди, участвующие в игре, принимают необходимые решения в процессе самого эксперимента. Такой способ имитации применяется как для обучения персонала, так и для исследования сложных систем, функционирующих с участием людей, деятельность которых не поддается формальному описанию.

В такой интерпретации, имитационное моделирование широко применяется в различных областях: производстве, экономике, космических исследованиях, военном деле и т.д. и является эффективным средством анализа и проектирования сложных систем.

2.3. Разделы математического программирования

В зависимости от вида функций f и Ф задача оптимизации может относиться к следующим разделам математического программирования:

1. Если критерий эффективности W = $f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ представляет линейную функцию, а функции $\Phi(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ в системе ограничений также линейны, то такая задача является задачей **линейного программирования**. Если, исходя из содержательного смысла, ее решения должны быть целыми числами, то эта задача **целочисленного линейного программирования**.

2. Если критерий эффективности и система ограничений задаются нелинейными функциями, то имеем задачу **нелинейного программирования**.

В частности, если указанные функции обладают свойствами выпуклости, то полученная задача является задачей **выпуклого программирования**.

3. Если в задаче математического программирования процесс по какому-либо признаку делится на этапы и критерий эффективности выражается не в явном виде как функция переменных, а косвенно - через уравнения, описывающие протекание операции по этапам, т.е. являются аддитивной или мультипликативной функцией переменных параметров, то такая задача является задачей **динамического программирования.**

4. Если критерий эффективности и система ограничений задаются функциями вида $c \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$, имеем задачу **геометрического программирования**.

5. Если переменные x_j в функциях f и Ф зависят от каких-либо параметров, то получим задачу **параметрического программирования**, если функции x_j носят случайный характер -задачу **стохастического программирования**. В этом случае вместо функции X рассматривают ее математическое ожидание M{(X)}.

6. Если на переменные x_j наложено условие дискретности, то есть область изменения переменных x_j состоит из отдельных точек, имеем задачу **дискретного программирования**.

7. Если точный оптимум функции найти алгоритмическим путем невозможно из-за чрезмерно большого числа вариантов решения или чрезмерно сложного вида целевой функции, то прибегают к методам **эвристического программирования** (от греческого hurisko - отыскиваю, открываю), позволяющим существенно сократить просматриваемое число вариантов и найти если не оптимальное, то достаточно хорошее, удовлетворительное с точки зрения практики, решение, т.е. субоптимальное решение. При этом пользуются специальными приемами - эвристиками - совокупностью знаний, опыта, интуиции, интеллекта, позволяющими существенно сократить число просматриваемых вариантов с позиции "здравого смысла". Эвристические методы также применяют, когда оптимальное решение в принципе может быть найдено (т.е. задача алгоритмически разрешима), однако для этого требуются объемы ресурсов, значительно превышающие наличные.

Из перечисленных выше методов математического программирования наиболее развитыми и законченными, имеющими широкую область применения, являются линейное и динамическое программирование. В их рамки укладывается широкий круг задач исследования операций.

2.4. Области применения математического программирования

Методы математического программирования используются для решения широкого спектра оптимизационных задач. По своей содержательной постановке, целям и объектам исследования множество задач исследования операций может быть разбито на ряд классов.

Задачи сетевого планирования и управления (СПУ) состоят в нахождении минимальных продолжительностей и моментов начала комплекса операций, оптимального соотношения величин стоимости и сроков их выполнения.

Задачи массового обслуживания посвящены изучению и анализу систем обслуживания очередей заявок или требований и состоят в определении показателей эффективности работы систем, их оптимальных характеристик, например, в определении числа каналов обслуживания, времени обслуживания и т.п.

Задачи управления запасами состоят в отыскании оптимальных значений уровня запасов (точки заказа) и размера заказа. Особенность таких задач заключается в том, что с увеличением уровня запасов, с одной стороны, увеличиваются затраты на их хранение, но с другой стороны, уменьшаются потери вследствие возможного дефицита запасаемого продукта.

Задачи распределения ресурсов возникают при определенном наборе операций (работ), которые необходимо выполнять при ограниченных наличных ресурсах, и требуется найти оптимальные распределения ресурсов между операциями или состав операций.

Задачи ремонта и замены оборудования актуальны в связи с износом и старением оборудования и необходимостью его замены с течением времени. Задачи сводятся к определению оптимальных сроков, числа профилактических ремонтов и проверок, а также моментов замены оборудования модернизированным.

Задачи составления расписания (календарного планирования) состоят в определении оптимальной очередности выполнения операций (например, обработки деталей) на различных видах оборудования.

Задачи планировки и размещения состоят в определении оптимального числа и места размещения новых объектов с учетом их взаимодействия с существующими объектами и между собой.

Задачи выбора маршрута, или сетевые задачи состоят в исследовании разнообразных задач на транспорте и в системе связи и состоят в определении наиболее экономичных маршрутов. Задачи сетевого планирования и управления совместно с сетевыми задачами составляют основу раздела математического программирования, называемого *теорией графов*.

Игровые задачи, состоящие в принятии оптимальных решений в конфликтных ситуациях, представляют особый класс оптимизационных задач. К конфликтным ситуациям, в которых сталкиваются интересы двух (или более) сторон, преследующих разные цели, можно отнести ряд ситуаций в области экономики, права, военного дела и т. п. Игровые задачи являются предметом специфического раздела математического программирования, называемого **теорией игр**. В задачах теории игр необходимо выработать рекомендации по разумному поведению участников конфликта, определить их оптимальные стратегии.

В нашем курсе рассмотрим некоторые из приведенных видов задач исследования операций.

Вообще-то, про вырожденное решение я вам рассказывал, но, раз просите, дам и электронную версию.

3.11. Понятие о вырожденном решении.

При рассмотрении симплексного метода предполагалось, что все свободные члены уравнений положительны, т.е. $b_i > 0$, как в исходной системе ограничений, так и в системах, получаемых в очередных итерациях. Базисные решения (или опорные планы), соответствующие этим системам уравнений, являются ***невырожденными***. Это означает, данный опорный план задачи содержит ровно m положительных компонент, где m – количество базисных переменных в данной задаче.

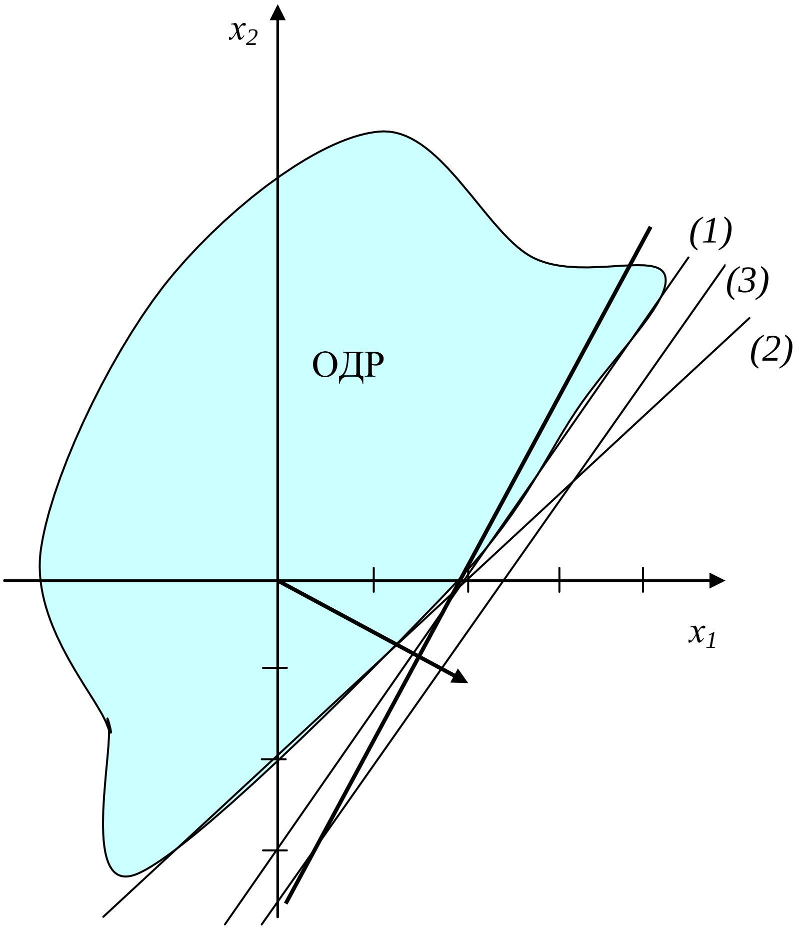
Если же в некоторых уравнениях свободные члены равны нулю (как было в п. 2 раздела 3.10), т.е. $b_i = 0$, то в соответствующем этой системе опорном решении базисные переменные, относительно которых эти уравнения разрешены, принимают нулевые значения. Опорное решение, в котором хотя бы одна из базисных переменных принимает нулевое значение, называется ***вырожденным решением***, а задача линейного программирования, имеющая хотя бы одно вырожденное решение, - ***вырожденной задачей***.

Базис опорного плана такой задачи образуется v положительными и (m-v) нулевыми компонентами, соответствующими базисным переменным. В такой ситуации минимальные значения оценочных отношений могут соответствовать не одному, а нескольким значениям i, т.е. нескольким уравнениям. В этом случае базис определяется неоднозначно: это может привести к тому, что переход к следующему базису приведет лишь еще к тому, что новый опорный план X′ совпадет со прежним планом X, а прирост значения целевой функции ΔФ будет равен нулю. Поскольку значение целевой функции остается неизменным, нет основания считать, что движение осуществляется по различным базисам. (В невырожденной задаче только изменение целевой функции гарантировало от повторения базиса).

Это означает, что мы вернемся к тому же самому положению (с той же самой симплекс-таблицей), в котором уже были, и значит, применяя в этом случае последовательные итерации, мы можем вернуться к ранее встречавшемуся набору базисных и свободных переменных, то есть, возникает, так называемое, ***зацикливание*** в процессе решения задачи.

Используя геометрическую интерпретацию задачи линейного программирования для простейшего случая, когда n-m=2, легко отличить вырожденную задачу линейного программирования от невырожденной. В вырожденной задаче в одной вершине многоугольника решений пересекается более двух прямых, описываемых уравнениями вида $x_k=0$. Это значит, что одна или несколько сторон многоугольника решений стягивается в одну точку.

Так, при решении задачи п.2 раздела 3.10 графическим методом получим график вида



$\Phi = 2x_1 - x_2 \rightarrow max$

при ограничениях

$x_1 - x_2 \le 2,$

$3x_1 - 2x_2 \le 6,$

$6x_1 - 4x_2 \le 14,$

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$

Аналогично, при n-m=3 в вырожденной задаче в одной вершине пересекается более трех плоскостей $x_k=0$. Аналогия может быть продолжена и дальше.

Для устранения зацикливания существует несколько приемов или правил. Не затрагивая теоретического обоснования этих правил, являющегося специальным вопросом, так называемой, проблемы вырождения, отметим, что одно из правил рекомендует в опорном плане эти нулевые элементы матрицы заменить произвольной бесконечно малой величиной ε > 0 и рассматривать их как обычные базисные элементы плана.