

Министерство образования и науки Российской Федерации
Южно-Уральский государственный университет
Филиал ФГБОУ ВПО «ЮУрГУ» (НИУ) в г. Миассе
Кафедра прикладной математики и ракетодинамики

51(07)
Н166

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания и контрольные задания
для студентов-заочников

Челябинск
Издательство ЮУрГУ
2012

УДК 510(022)(076.5)

Н166

Одобрено

учебно-методической комиссией филиала ЮУрГУ в г. Миассе

Рецензент Тимощенко М.В.

Н166 Высшая математика: методические указания и контрольные задания для студентов-заочников/ О.Ю. Наговицына, О.И. Москалева; под ред. В.И. Киселева. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2012. – 116 с.

Методические указания являются руководством для подготовки студентов-заочников к зачету и экзамену, повышают усвоение материала студентами и служат хорошим ориентиром при выполнении контрольной работы. Пособие содержит распределение тем и заданий по семестрам, программу курса «Высшая математика», практические занятия, вопросы к экзамену, методические указания по выполнению контрольных работ, библиографический список.

УДК 510(022)(076.5)

ОГЛАВЛЕНИЕ

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМ И КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ КУРСА «ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА» ПО СЕМЕСТРАМ	4
ВВЕДЕНИЕ.....	4
ПРОГРАММА КУРСА «ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА».....	5
Тема 1. Элементы линейной алгебры, векторной алгебры и аналитической геометрии.....	5
Тема 2. Введение в математический анализ	7
Тема 3. Дифференциальное исчисление функции одной и многих переменных .	8
Тема 4. Интегральное исчисление функции одной переменной	9
Тема 5. Интегральное исчисление функций многих переменных.....	10
Тема 6. Теория функций комплексной переменной.....	10
Тема 7. Дифференциальные уравнения.....	10
Тема 8. Ряды	11
Тема 9. Теория вероятностей.....	12
Тема 10. Математическая статистика	13
ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ.....	13
I семестр.....	13
II семестр.....	15
III семестр	16
IV семестр.....	17
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ	18
Контрольная работа № 1	19
Контрольная работа № 2	23
Контрольная работа № 3	26
Контрольная работа № 4	44
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	48
ПРИЛОЖЕНИЕ	51

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМ И КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ КУРСА «ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА» ПО СЕМЕСТРАМ

№ темы	Название темы	№ контрольной работы
I семестр		
1	Элементы линейной алгебры, векторной алгебры и аналитической геометрии	1
2	Введение в математический анализ	
II семестр		
3	Дифференциальное исчисление функции одной переменной и многих переменных	2
4	Интегральное исчисление функции одной переменной	
III семестр		
5	Интегральное исчисление функции многих переменных	3
6	Теория функций комплексных переменных	
7	Дифференциальные уравнения	
8	Ряды	
IV семестр		
9	Теория вероятностей	4
10	Математическая статистика	

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа является методическим руководством по изучению курса высшей математики студентами-заочниками. Она содержит рабочую программу, методические и литературные указания по всему курсу, порядок изучения материала. Каждый раздел программы разбит на тематически цельные куски, сопровождаемые подробным комментарием по организации самостоятельной работы над курсом:

- определены экзаменационные вопросы по каждой теме;
- предлагается литература, рекомендуемая для изучения;
- в каждом пункте определены требования, предъявляемые к знаниям студентов и их практическим навыкам.

Контрольные работы рекомендуется решать после изучения соответствующей темы.

ПРОГРАММА КУРСА «ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА»

Согласно требованиям к обязательному минимуму содержания и уровню подготовки выпускник в результате усвоения дисциплины «Высшая математика» должен

иметь представление:

- о математике как особом способе познания мира, общности ее понятий и представлений;
- о математическом мышлении, принципах математических рассуждений и математических доказательств.

знать и уметь использовать:

- основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории вероятностей и математической статистики;

иметь опыт:

- употребления математической символики для выражения количественных и качественных отношений объектов;
- использования основных приемов обработки экспериментальных данных;
- исследования, аналитического и численного решения алгебраических уравнений;
- исследования, аналитического и численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Тема 1. Элементы линейной алгебры, векторной алгебры и аналитической геометрии

Матрицы. Виды матриц. Линейные операции над матрицами и их свойства. Определители второго и третьего порядка. Определители высших порядков. Миноры и алгебраические дополнения. Свойства определителей. Произведение матриц, свойства произведения. Транспонирование матриц, свойства. Обратная матрица. Критерий существования обратной матрицы. Ранг матрицы. Элементарные преобразования матрицы. Теорема о рангах эквивалентных матриц. Система n линейных уравнений с m неизвестными ($n \geq m$, $n < m$). Решение системы. Графическая иллюстрация системы второго порядка. Совместные, несовместные, определенные, неопределенные и эквивалентные системы. Матричная запись системы линейных уравнений. Решение системы линейных уравнений матричным методом. Системы двух и трех линейных уравнений. Вывод формул Крамера. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли. Критерии определенности, неопределенности и несовместности системы линейных уравнений. Однородная система линейных уравнений. Условия существования ненулевых решений. Фундаментальная система решений.

Трехмерное пространство. Векторы. Модуль вектора. Нулевой, единичный, коллинеарные, компланарные и равные векторы. Линейные операции над

векторами, свойства операций. Теорема о двух коллинеарных векторах. Проекция вектора на ось. Теорема о вычислении проекции. Свойства проекции. Понятие линейной зависимости и независимости векторов. Максимальное число линейно независимых векторов на прямой, в плоскости, в пространстве. Теорема о линейной зависимости четырех векторов. Понятие базиса. Разложение вектора по базису. Координаты вектора. Прямоугольный декартов базис. Вычисление длины вектора через его координаты. Направляющие косинусы вектора и их свойства. Орт вектора, его координаты. Линейные операции над векторами в координатной форме. Деление отрезка в данном отношении. Скалярное произведение векторов, геометрический и физический смысл. Свойства скалярного произведения. Теорема о вычислении скалярного произведения в координатах. Применение скалярного произведения при вычислении длины вектора, угла между векторами и проекции вектора. Векторное произведение двух векторов. Геометрический смысл. Свойства векторного произведения. Теорема о вычислении векторного произведения в координатах. Смешанное произведение трех векторов. Геометрический смысл. Свойства смешанного произведения. Формула вычисления смешанного произведения в координатах. Необходимые и достаточные условия: коллинеарности двух векторов, перпендикулярности двух векторов, компланарности трех векторов (в координатной форме). Определение линейного пространства. Примеры. Линейная зависимость и независимость векторов. Необходимое и достаточное условие линейной зависимости векторов. Следствия. Размерность и базис линейного пространства. Теорема о разложении вектора по базису. Координаты вектора, свойства. Матрица перехода от одного базиса к другому. Преобразование координат вектора. Скалярное произведение векторов. Определение евклидова пространства. Длина вектора. Свойства. Угол между векторами. Ортонормированный базис. Процесс Грамма-Шмидта ортогонализации системы векторов. Выражение скалярного произведения через координаты в ортонормированном базисе.

Системы координат (декартова система координат на плоскости и в пространстве, полярная система координат на плоскости, цилиндрические и сферические координаты в пространстве). Преобразования координат. Уравнение линии на плоскости. Уравнение поверхности в пространстве. Линия в пространстве. Два типа задач, связанных с аналитическим представлением линии на плоскости, поверхности в пространстве. Прямая линия на плоскости. Теорема о связи уравнения прямой в плоскости и уравнения первой степени относительно x и y . Различные виды уравнений прямой на плоскости. Геометрический смысл входящих в уравнение параметров. Нормальный и направляющий векторы. Нахождение угла между двумя прямыми на плоскости. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых на плоскости. Нахождение расстояния от точки до прямой на плоскости. Плоскость в пространстве. Теорема о связи уравнения плоскости в пространстве и уравнения первой степени относительно x , y и z . Различные виды уравнений плоскости в пространстве. Геометрический смысл входящих в уравнение параметров. Нормальный вектор плоскости. Пучки и

связки плоскостей. Определение угла между двумя плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей. Определение расстояния от точки до плоскости. Различные виды уравнений прямой в пространстве. Геометрический смысл входящих в уравнение параметров. Направляющий вектор прямой. Нахождение угла между двумя прямыми в пространстве. Условия параллельности и перпендикулярности прямых в пространстве. Определение угла между плоскостью и прямой в пространстве. Условия параллельности и перпендикулярности плоскости и прямой в пространстве. Условие пересечения двух прямых. Нахождение точки пересечения плоскости и прямой в пространстве. Проекция точки на плоскость. Определение расстояния от точки до прямой. Определение расстояния между двумя прямыми в пространстве. Каноническое уравнение эллипса. Геометрический смысл параметров уравнения. Фокусы. Эксцентриситет. Директрисы. Каноническое уравнение гиперболы. Геометрический смысл его параметров. Форма гиперболы. Фокусы. Асимптоты. Директрисы. Каноническое уравнение параболы. Геометрический смысл его параметров. Фокус. Директриса.

Тема 2. Введение в математический анализ

Элементы математической логики: необходимое и достаточное условия. Прямая и обратная теоремы. Символы математической логики, их использование. Множества и операции над ними. Счетные множества. Множество действительных чисел. Свойства действительных чисел. Числовые промежутки. Модуль действительного числа. Понятие функции. График функции. Основные элементарные функции (x^a , a^x , $\log_a x$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arccotg} x$) и их графики. Сложная функция. Обратная функция. Числовая последовательность. Предел числовой последовательности. Определение предела функции в точке x_0 . Пределы функции в бесконечности (при $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow \pm\infty$). Геометрический смысл. Односторонние пределы функции в точке. Геометрический смысл. Теорема о единственности предела функции. Теорема о локальной ограниченности функции, имеющей предел. Бесконечно малые функции. Свойства бесконечно малых функций. Бесконечно большие функции. Теорема о связи между бесконечно малой и бесконечно большой функциями. Соотношение бесконечно большой и неограниченной функций. Теорема о представлении функции, имеющей предел, в виде суммы предела и бесконечно малой. Теорема о пределе суммы. Теорема о пределе произведения. Теорема о пределе частного. Теорема о переходе к пределу в неравенствах. Теорема о промежуточной функции. Первый замечательный предел. Следствия. Второй замечательный предел. Число e . Экспоненциальная и гиперболические функции. Их свойства и графики. Натуральные логарифмы. Свойства логарифмов. Логарифмическая функция. Сравнение бесконечно малых. Эквивалентные бесконечно малые. Порядок малости относительно x^n при $x \rightarrow 0$. Непрерывность функции в точке. Точки разрыва и их классификация. Локальные свойства

функций, непрерывных в точке: локальное знакопостоянство, локальная ограниченность. Непрерывность обратной и сложной функции. Основные элементарные функции и их непрерывность. Теорема о непрерывности элементарных функций. Свойства функций, непрерывных на отрезке: ограниченность функции, непрерывной на отрезке; достижение ею наибольшего и наименьшего значений; обращение в ноль функции, принимающей на концах отрезка значения разных знаков; теорема о промежуточных значениях.

Тема 3. Дифференциальное исчисление функции одной и многих переменных

Понятие производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 . Геометрический и механический смысл производной в точке. Производная суммы, произведения, частного функций. Производная элементарных функций $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, a^x , $\log_a x$. Дифференцирование сложной функции. Производная степенной функции $y = x^a$. Производная обратной функции. Производные обратных тригонометрических функций $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$ и др. Дифференцирование функций, заданных параметрически. Производные высших порядков. Производные различных порядков от функций, заданных параметрически. Уравнение касательной и нормали к кривой. Дифференциал функции в точке. Геометрический смысл дифференциала. Линеаризация дифференцируемой функции и приближенные вычисления. Инвариантность формы дифференциала первого порядка. Дифференциалы различных порядков. Неинвариантность старших дифференциалов. Теорема Роля, ее геометрический смысл. Теорема Лагранжа, ее геометрический смысл. Теорема Коши. Теорема Лопиталья (раскрытие неопределенности типа $\frac{0}{0}$). Раскрытие неопределенностей различного вида на основе правила Лопиталья. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано и в форме Лагранжа. Разложение функций e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^a$ по формуле Тейлора. Монотонность функции. Определение. Необходимый признак монотонности функции на отрезке. Монотонность функции. Определение. Достаточный признак монотонности функции. Экстремум функции. Необходимое условие экстремума функции. Первый достаточный признак существования экстремума функции. Второй достаточный признак существования экстремума функции. Выпуклость (вогнутость) кривой. Достаточный признак выпуклости (вогнутости) графика функции. Точки перегиба графика функции. Достаточный признак точки перегиба графика функции. Асимптоты графика функции – вертикальные и наклонные. Необходимое и достаточное условия существования наклонной асимптоты. Схема исследования функций и построения графиков методами дифференциального исчисления.

Понятие функций многих переменных. Область определения. Предел. Непрерывность. Частные производные. Геометрический смысл частных

производных функции двух переменных. Дифференцируемость функции. Полный дифференциал. Необходимое условие дифференцируемости. Достаточное условие дифференцируемости (без доказательства). Дифференцирование сложной функции, неявной функции. Инвариантность формы полного дифференциала. Производные по направлению. Градиент и его связь с производной по направлению. Экстремальное свойство градиента. Частные производные и дифференциалы высших порядков. Неинвариантность формы дифференциалов высших порядков. Формула Тейлора (форма с использованием дифференциалов, форма с использованием частных производных для функции двух переменных). Касательная плоскость и нормали к поверхности. Геометрический смысл дифференциала. Экстремумы. Необходимые и достаточные условия существования экстремума. Условный экстремум.

Тема 4. Интегральное исчисление функции одной переменной

Первообразная. Теорема о первообразных. Неопределенный интеграл, его свойства. Таблица основных формул интегрирования. Методы интегрирования: по частям и подстановкой. Интегралы, вычисляемые с помощью интегрирования по частям (подынтегральные функции вида:

$P_n(x)\cos ax, P_n(x)\sin ax, P_n(x)e^{ax}, P_n(x)\ln x, e^{ax}\cos bx, e^{ax}\sin bx$). Интегрирование простейших рациональных дробей $\left(\frac{A}{(x-a)}, \frac{A}{(x-a)^k}, \frac{Ax+B}{x^2+px+q}, \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\right)$, где

$k \geq 2, p^2 - 4q < 0$). Понятие дробно-рациональной функции. Теорема о разложении правильной рациональной дроби на простейшие. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции

$(R(\sin x, \cos x), \cos mx \cdot \cos nx, \sin mx \cdot \sin nx)$. Универсальная подстановка. Частные случаи (четность – нечетность функций $R(\sin x, \cos x), R(\sin^2 x, \cos^2 x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x), R(\sin^m x \cdot \cos^n x)$). Интегрирование иррациональных выражений вида:

$R\left(x, \sqrt[k]{ax+b}, \dots, \sqrt[n]{ax^2+bx}\right), R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right), R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$. Частные случаи $R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right), R\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right), R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right), \frac{px+g}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Тригонометрические подстановки. Интегральные суммы. Понятие определенного интеграла. Достаточное условие существования определенного интеграла. Свойства определенного интеграла. Теорема о среднем значении функции. Теорема о производной определенного интеграла с переменным пределом. (Теорема Барроу). Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменных в определенном интеграле. Интегрирование по частям в определенном интеграле. Приближенное вычисление определенного интеграла: формулы прямоугольника, трапеций и Симпсона. Площадь криволинейного сектора в полярных координатах. Длина дуги кривой, заданной уравнением $y = f(x)$. Длина дуги кривой, заданной параметрически. Длина дуги кривой в полярных координатах.

Вычисление объема тела по площадям параллельных сечений. Объем тела вращения. Вычисление работы с помощью определенного интеграла. Несобственные интегралы от ограниченной функции по неограниченному промежутку. Сходимость. Признаки сходимости. Несобственные интегралы от неограниченных функций по ограниченному промежутку. Сходимость. Признаки сходимости.

Тема 5. Интегральное исчисление функций многих переменных

Определение, теорема существования и свойства двойных и тройных интегралов. Вычисление кратных интегралов для случая прямоугольных областей со сторонами (гранями), параллельными осям координат. Повторные интегралы для прямоугольных областей. Вычисление кратных интегралов для случая простых областей сведением к повторному. Теорема эквивалентности кратного и повторного интегралов. Замена переменных в двойных интегралах. Теорема о геометрическом смысле якобиана замены переменных. Переход к полярным координатам в двойных интегралах. Замена переменных в тройных интегралах. Переход к сферическим и цилиндрическим координатам в тройных интегралах.

Тема 6. Теория функций комплексной переменной

Комплексные числа. Области и их границы. Окрестности. Функции комплексной переменной. Предел функции. Непрерывность. Основные элементарные функции и их свойства. Дифференцируемость. Условия Коши-Римана. Аналитические функции. Геометрический смысл аргумента и модуля производной аналитической функции. Конформные отображения. Принцип соответствия границ. Принцип симметрии. Интеграл от функции комплексной переменной. Теорема Коши. Формула Коши. Производные высших порядков от аналитической функции. Числовые и функциональные ряды. Ряд Тейлора. Ряд Лорана. Особые точки, их классификация. Вычеты, их вычисление. Основная теорема о вычетах. Применение вычетов к вычислению интеграла.

Тема 7. Дифференциальные уравнения

Понятие дифференциального уравнения. Порядок дифференциального уравнения. Решение дифференциального уравнения. Геометрическая иллюстрация для уравнения I порядка. Дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения задачи Коши (без доказательства). Общее решение, частное решение, особое решение. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделенными и разделяющимися переменными, методы решения. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка, методы решения. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка, метод решения. Уравнения Бернулли, метод решения. Уравнения в полных дифференциалах, метод решения.

Решение дифференциальных уравнений первого порядка методом Эйлера. Дифференциальные уравнения высших порядков. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения задачи Коши (без доказательства). Общее решение дифференциального уравнения. Дифференциальные уравнения высшего порядка, допускающие понижение порядка. Понятие о краевых задачах. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Задача Коши для нормальной системы n -го порядка. Теорема существования и единственности решения задачи Коши (без доказательства). Сведение задачи Коши для уравнения n -го порядка к задаче Коши для нормальной системы n -го порядка. Сведение нормальной линейной системы к линейному уравнению. Приближенные методы интегрирования систем дифференциальных уравнений и уравнений n -го порядка. Линейные однородные уравнения. Свойства решений. Определитель Вронского. Фундаментальная система решений. Теорема о структуре общего решения. Восстановление линейного однородного уравнения по заданной фундаментальной системе решений. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами. Построение фундаментальной системы решений (корни характеристического уравнения действительные и различные, комплексные, кратные). Общее решение. Линейные неоднородные уравнения. Теорема о структуре общего решения. Принцип суперпозиции. Линейные неоднородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Решение методом вариации произвольных постоянных. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами. Метод неопределенных коэффициентов построения решений для правых частей вида $P_n(x)$, e^{ax} , $\cos \beta x$, $\sin \beta x$, $P_n(x)e^{ax}$, $P_n(x)\cos \beta x$, $P_n(x)\sin \beta x$, $e^{ax}P_n(x)\cos \beta x$, $e^{ax}P_n(x)\sin \beta x$. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Построение фундаментальной системы решений методом подстановки, методом Эйлера. Понятие устойчивости решения (по Ляпунову). Асимптотическая устойчивость. Тривиальное решение (точка покоя). Исследование траекторий в окрестности точки покоя. Классификация точек покоя. Исследование на устойчивость по первому приближению. Критерий Гурвица.

Тема 8. Ряды

Числовой ряд. Сумма ряда, частичная сумма. Остаток ряда. Сходящиеся и расходящиеся ряды. Необходимый признак сходимости. Простейшие действия над рядами (отбрасывание первых m членов, почленное умножение на число, почленное сложение и вычитание). Ряды с положительными членами. Признаки сравнения. Достаточные признаки сходимости для рядов с положительными членами: признак Даламбера, радикальный признак Коши, интегральный признак Коши. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость. Достаточные признаки абсолютной сходимости. Основные свойства абсолютно сходящихся рядов. Знакопеременные ряды. Теорема Лейбница. Оценка остатка ряда. Функциональные ряды. Область сходимости. Равномерная сходимость. Признак

Вейерштрасса. Непрерывность суммы равномерно сходящегося ряда. Теоремы о почленном интегрировании и дифференцировании функциональных рядов. Степенные ряды. Теорема Абеля. Радиус сходимости. Интервал сходимости. Равномерная сходимость степенного ряда. Почленное интегрирование степенных рядов. Теорема о сохранении радиуса сходимости степенного ряда при почленном дифференцировании. Ряды Тейлора и Маклорена. Единственность разложения функции в степенной ряд. Достаточные условия разложения функции в степенной ряд. Разложение некоторых элементарных функций в степенной ряд: e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^a$, $\arctg x$. Приложение степенных рядов к вычислению функций, интегралов и решению дифференциальных уравнений. Ортогональные системы функций. Ряд по ортогональной системе функций. Вычисление коэффициентов Фурье. Тригонометрические системы функций и тригонометрические ряды. Теорема о разложении функции в ряд Фурье (теорема Дирихле). Тригонометрический ряд Фурье для четных и нечетных функций (промежутки от $-\pi$ до π). Ряд Фурье для функции с периодом $2l$. Разложение в ряд Фурье непериодической функции (промежутки от 0 до l).

Тема 9. Теория вероятностей

Эксперимент. Пространство элементарных исходов эксперимента. Вероятность элементарного исхода. Случайные события. Алгебра случайных событий. Геометрические вероятности. Вероятность случайного события. Схема случаев. Вероятность и частота. Условная вероятность. Независимость случайных событий. Правило умножения вероятностей. Несовместность и совместность. Правило сложения вероятностей совместных событий. Соотношение несовместности и независимости. Полная система случайных событий. Формула полной вероятности. Случайная величина как функция на пространстве элементарных событий. Случайная величина – числовая фиксация результатов эксперимента. Закон распределения случайной величины. Ряд распределения дискретной случайной величины и его свойства. Функция распределения дискретной случайной величины. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины. Математическое ожидание суммы и дисперсия суммы независимых случайных величин. Другие свойства математического ожидания и дисперсии. Последовательность независимых экспериментов и бернуллиевская случайная величина. Ее ряд распределения, математическое ожидание и дисперсия. Теорема о сходимости бернуллиевской случайной величины к пуассоновской. Пуассоновская случайная величина, ее ряд распределения, математическое ожидание и дисперсия. Плотность распределения непрерывной случайной величины и ее свойства. Вероятность попадания случайной величины в промежуток. Функция распределения непрерывной случайной величины и ее свойства. Вероятность попадания случайной величины в промежуток. Числовые характеристики непрерывной случайной величины: математическое ожидание, дисперсия, среднеквадратическое отклонение. Равномерно распределенная

случайная величина на промежутке $[a, b]$ и ее свойства. Математическое ожидание и дисперсия равномерного распределения. Равномерное распределение на $[0, 1]$. Экспоненциальная случайная величина, ее плотность, функция распределения, числовые характеристики. Нормальное распределение. Функция нормального распределения, плотность нормального распределения, математическое ожидание, дисперсия. Функция Лапласа. Нормирование и центрирование нормальной случайной величины. Неравенство Чебышева. Закон больших чисел в форме Чебышева. Закон больших чисел в форме Бернулли (сходимость частоты к вероятности). Центральная предельная теорема в форме Ляпунова. Предельная теорема Муавра-Лапласа. Вычисление биномиальных вероятностей: $P\{k_1 \leq \xi_n \leq k_2\}$. Локальная предельная теорема Муавра-Лапласа. Вычисление биномиальных вероятностей: $P\{\xi_n = k\}$.

Тема 10. Математическая статистика

Выборка из закона распределения случайной величины. Вариационный ряд. Выборочные характеристики: среднее, стандарт (выборочная дисперсия), гистограмма, эмпирическая функция распределения. Статистические оценки генеральной средней. Доверительный интервал и доверительная вероятность. Точность и надежности определения среднего по выборке (доверительный интервал для математического ожидания). Определение необходимого объема выборки. Точность и надежность определения среднего по малой выборке из нормального закона распределения для случая неизвестной дисперсии. Критерии согласия. Гипотеза о законе распределения. Критерий χ^2 Пирсона. Гипотеза о математическом ожидании. Критерий Стьюдента. Функциональная зависимость и регрессия. Кривые регрессии и их свойства. Коэффициент корреляции, свойства и оценки. Метод наименьших квадратов построения коэффициентов линейной по параметрам регрессионной модели.

ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

I семестр

1. Определители второго и третьего порядка.
2. Свойства определителей.
3. Миноры и алгебраические дополнения.
4. Определитель n-го порядка.
5. Понятие о матрицах. Виды матриц.
6. Действие над матрицами (сравнение, транспонирование, сложение и вычитание, умножение матриц на число, умножение матриц), их определение и свойства.
7. Обратная матрица (определение, формула, свойства).
8. Системы двух уравнений с двумя неизвестными. Вывод формул Крамера.
9. Системы трех уравнений с тремя неизвестными. Теорема о решении.

10. Матричная запись систем линейных уравнений и матричный способ решения систем.
11. Вычисление определителей методом Гаусса.
12. Ранг матриц. Теорема Кронекера-Капелли.
13. Линейная зависимость и независимость систем векторов.
14. Векторы на плоскости и в пространстве (основные определения, понятия, произведение вектора на число, длина вектора, нулевой вектор).
15. Коллинеарные, компланарные и равные векторы (определения).
16. Действия над векторами. Координаты вектора. Скалярное произведение двух векторов.
17. Косинус угла между двумя векторами.
18. Деление отрезка в данном отношении и расстояние между двумя точками.
19. Уравнение линии на плоскости:
20. а) уравнение в декартовой прямоугольной системе координат;
21. б) пересечение двух линий;
22. в) уравнение линии в параметрической форме.
23. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Угловой коэффициент прямой.
24. Уравнение прямой с угловым коэффициентом, проходящее через одну точку.
25. Уравнение прямой на плоскости, проходящей через две заданные точки.
26. Вычисление угла между двумя заданными прямыми. Условие параллельности и перпендикулярности прямых.
27. Общее уравнение прямой и его исследование.
28. Уравнение прямой в отрезках. Расстояние от точки до прямой.
29. Эллипс (определение; каноническое уравнение; эксцентриситет; директрисы).
30. Гипербола (определение; каноническое уравнение; исследование формы; эксцентриситет; гипербола, как график квадратного трехчлена; гипербола, асимптоты которой параллельны координатным осям; гипербола, как график обратной пропорциональности).
31. Парабола (определение, каноническое уравнение, виды парабол).
32. Общее уравнение плоскости и его исследование.
33. Угол между двумя плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.
34. Канонические и параметрические уравнения прямой в пространстве.
35. Уравнение прямой в пространстве, проходящей через две точки. Угол между двумя прямыми в пространстве.
36. Абсолютная величина действительного числа и ее свойства.
37. Окрестности точки.
38. Понятие функции. Основные свойства функции.
39. Понятие множества и операции над ними.
40. Основные элементарные функции. Элементарные функции.
41. Преобразование графиков.
42. Предел числовой последовательности. Геометрический смысл предела.
43. Предел точки в бесконечности и в точке.

44. Бесконечно малые величины. Связь бесконечно малых величин с пределами функций. Свойства бесконечно малых величин.
45. Бесконечно большие величины. Свойства бесконечно больших величин. Связь между бесконечно большими и бесконечно малыми величинами.
46. Основные теоремы о пределах.
47. Признаки существования пределов.
48. Первый замечательный предел.
49. Второй замечательный предел.
50. Непрерывность функции.

II семестр

1. Определение производной. Схема вычисления производной.
2. Зависимость между непрерывностью и дифференцируемостью функции.
3. Основные правила дифференцирования.
4. Производные основных элементарных функций.
5. Производная сложной и обратной функции.
6. Производная от функции, заданной неявно и параметрически.
7. Понятия о производных высших порядков.
8. Понятие дифференциала функции. Применение дифференциала в приближенных вычислениях.
9. Правило Лопиталя.
10. Признаки монотонности функции.
11. Экстремумы функции и правило их нахождения.
12. Выпуклость функции. Точки перегиба функции.
13. Асимптоты графика функции.
14. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.
15. Общая схема исследования функции и построение их графиков.
16. Функции нескольких переменных (основные понятия).
17. Геометрическое изображение функции нескольких переменных.
18. Предел и непрерывность функции нескольких переменных.
19. Частные производные функции нескольких переменных.
20. Дифференциал функции нескольких переменных.
21. Экстремумы функции нескольких переменных.
22. Метод наименьших квадратов.
23. Первообразная и неопределенный интеграл.
24. Свойства неопределенного интеграла.
25. Основные методы интегрирования: метод разложения, метод замены переменной, метод интегрирования по частям.
26. Разложение рациональных дробей на простейшие и интегрирование простейших рациональных дробей.
27. Интегралы от иррациональных функций
28. Интегрирование тригонометрических функций с помощью тригонометрических подстановок.

29. Определение и теорема существования определенного интеграла.
30. Свойства определенного интеграла.
31. Определенный интеграл, как функция верхнего предела.
32. Формула Ньютона-Лейбница.
33. Формула замены переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле.
34. Несобственные интегралы.
35. Приложение определенного интеграла к вычислению площадей плоских фигур.

III семестр

1. Определение и условия существования двойного интеграла.
2. Свойства двойного интеграла.
3. Вычисление двойных интегралов в декартовых координатах.
4. Двойной интеграл в полярных координатах.
5. Перемена порядка интегрирования.
6. Вычисление площадей плоских фигур.
7. Определение комплексного числа.
8. Геометрическое изображение на плоскости.
9. Модуль и аргумент комплексного числа.
10. Алгебраическая, тригонометрическая и показательная форма комплексного числа.
11. Основные действия над комплексными числами.
12. ДУ первого порядка (общие понятия, задача Коши, теорема существования и единственности решения).
13. Геометрический смысл уравнения.
14. Уравнения с разделяющимися переменными.
15. Линейные уравнения.
16. Уравнения в полных дифференциалах.
17. ДУ второго порядка (общие понятия, теорема существования и единственности решения).
18. Уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка.
19. Линейные однородные ДУ второго порядка (теорема об общем решении).
20. Линейные однородные ДУ с постоянными коэффициентами.
21. Линейные неоднородные ДУ с постоянными коэффициентами.
22. Решение неоднородных ДУ методом вариаций произвольных постоянных.
23. Числовые ряды (основные понятия).
24. Свойства сходящихся рядов.
25. Ряды с положительными членами. Необходимый признак сходимости ряда.
26. Достаточные признаки сходимости рядов (сравнения, Даламбера, Коши).
27. Знакопередающиеся ряды. Теорема Лейбница.
28. Знакопеременные ряды.
29. Степенные ряды. Теорема Абеля.

30. Способы определения интервала сходимости степенного ряда.

IV семестр

1. Алгебра событий и вероятностей: основные формулы комбинаторики, классификация событий, вероятность события.
2. Основные теоремы (умножение событий, сложение событий, следствие теорем сложения и умножения).
3. Формула полной вероятности и формула Байеса.
4. Повторные независимые испытания: формула Бернулли.
5. Формула Пуассона.
6. Локальная и интегральная теоремы Лапласа.
7. Вероятность отклонения относительной частоты события от его вероятности.
8. Наивероятнейшее число появлений событий, простейший поток событий.
9. Случайные величины: определение дискретной случайной величины, функция распределения случайной величины.
10. Числовые характеристики дискретной случайной величины (математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение).
11. Биномиальный закон распределения, закон распределения Пуассона, геометрическое распределение, гипергеометрическое распределение.
12. Определение непрерывной случайной величины, плотность распределения вероятностей непрерывной величины.
13. Числовые характеристики непрерывной случайной величины.
14. Показательный закон распределения вероятностей.
15. Нормальный закон распределения вероятностей
16. Закон больших чисел.
17. Математическая статистика: генеральная совокупность, выборочная совокупность, статическое распределение выборки.
18. Эмпирическая функция распределения, полигон и гистограмма
19. Числовые характеристики выборки.
20. Статистические оценки параметров распределения, оценка генеральной средней, оценка генеральной дисперсии, интервальные оценки параметров распределения.
21. Доверительные интервалы для оценки математического ожидания нормального распределения.
22. Проверка статистических гипотез.
23. Критерий согласия Пирсона.
24. Вычисление теоретических частот нормального распределения.
25. Элементы теории корреляции, условные средние, выборочные уравнения регрессии.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Семестровая контрольная работа является одним из видов самостоятельной работы студентов, входит в учебный план дисциплины «Высшая математика» как обязательный элемент учебной деятельности.

Для выполнения работы студент должен знать перечень заданий, которые необходимо выполнить, и номер своего варианта.

Набор заданий, которые будут включены в семестровую работу студентов, определяет преподаватель.

Номер варианта определяется порядковым номером студента в списке, представленном в журнале группы. Номер каждого задания состоит из двух частей: первое число определяет номер раздела, к которому относится задание, второе число – порядковый номер задания в данном разделе.

Требования к оформлению контрольных работ:

- работа выполняется в отдельной тетради (12–18 листов) в клетку с полями,
- записи выполнять ручкой, графические построения – карандашом,
- обложка тетради оформляется в печатном виде в соответствии с образцом, представленном в приложении,
- работа оформляется разборчивым почерком,
- приводится полное решение с необходимыми пояснениями, вычислениями и расчетами,
- после решения записывается ответ (если задание содержит несколько пунктов, то ответ необходимо записывать для каждого пункта решения),
- решение задач должно быть представлено по порядку.

Контрольная работа сдается диспетчеру заочного отделения (103 аудитория Электротехнического факультета) до указанного преподавателем срока. Работа принимается на проверку только в том случае, если содержит все задания, которые были включены в семестровую работу, и удовлетворяет требованиям к оформлению.

На проверку семестрового задания преподавателю необходимо не менее 10 дней со дня сдачи работы.

Результаты проверки семестровой работы преподаватель заносит в списки, находящиеся у диспетчера заочного отделения, по мере проверки работ.

Если семестровая работа содержит все задания, удовлетворяет предъявляемым требованиям к оформлению и выполнена без серьезных ошибок, то она считается допущенной к экзамену, иначе возвращается на доработку. Для чего семестровую работу следует взять у диспетчера, выполнить в течение 2–3 дней работу над ошибками в этой же тетради и сдать для повторной проверки.

Студенты, не представившие работу в срок, установленный учебным графиком, или не получившие за неё положительную оценку, к экзамену по математике не допускаются.

Рекомендуется выполнение заданий семестровой работы по мере изучения соответствующих тем, поскольку это способствует более глубокому усвоению полученных знаний и своевременному формированию умений. Необходимо отметить, что правильное своевременное выполнение семестровой работы является одним из основных параметров, определяющих успешность освоения предмета.

Контрольная работа № 1

Задача 1. Вычислить определитель 4 порядка методом Гаусса. Число n равно номеру вашего варианта.

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -n & 2 \cdot n \end{vmatrix}$$

Задача 2. Исследовать систему линейных уравнений с помощью определителей и решить ее методом Гаусса.

$$1. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 6 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 6 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 7 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 7 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 6 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -1 \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -2 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 6 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$

Задача 3. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса, указать свободные и базисные неизвестные; n – номер варианта.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = n \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 - 3x_4 = 2n \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 = n. \end{cases}$$

Задача 4. Два цеха X_1 и X_2 выпускают продукцию Π_1, Π_2, Π_3 в следующем количестве:

$$A = \begin{pmatrix} n & 2n \\ 2n & n \\ n & 3n \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{Цех } X_1 \\ \text{Цех } X_2 \\ \text{Цех } X_3 \end{matrix} \begin{matrix} \text{Продукция } \Pi_1 \\ \text{Продукция } \Pi_2 \\ \text{Продукция } \Pi_3 \end{matrix}$$

Найти произведения матриц $T \cdot A, A \cdot E, T \cdot A \cdot E$ и объяснить их смысл, если $T = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ – матрица цен за единицу продукции Π_1, Π_2, Π_3 в рублях, матрица $E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, n – номер варианта.

Задача 5. Решить линейную систему в задаче 2 по формулам Крамера.

Задача 6. Даны матрицы A, B . Найти: а) транспонированную матрицу A^T , б) обратную матрицу A^{-1} , в) матрицу $X = AB + B$.

$$1 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad 2 \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$3 \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad 4 \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$5 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad 6 \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$7 \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad 8 \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$9 \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad 10 \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ll}
11 \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} & 12 \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\
13 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} & 14 \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\
15 \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & 16 \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\
17 \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 7 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} & 18 \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
19 \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & 20 \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Задача 7. Является ли система векторов $\vec{a} = (1, 1, 2)$, $\vec{b} = (-1, n, n - 1)$, $\vec{c} = (n, 1, n+1)$ линейно зависимой? n – номер варианта.

Задача 8. Даны векторы x , \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} в некотором базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Доказать, что векторы \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} образуют базис и найти координаты x в этом базисе.

1. $x = (-2, 4, 7)$, $\vec{a} = (0, 1, 2)$, $\vec{b} = (1, 0, 1)$, $\vec{c} = (-1, 2, 4)$.
2. $x = (6, 12, -1)$, $\vec{a} = (1, 3, 0)$, $\vec{b} = (2, -1, 1)$, $\vec{c} = (0, -1, 2)$.
3. $x = (1, -4, 4)$, $\vec{a} = (2, 1, -1)$, $\vec{b} = (0, 3, 2)$, $\vec{c} = (1, -1, 1)$.
4. $x = (-9, 5, 5)$, $\vec{a} = (4, 1, 1)$, $\vec{b} = (2, 0, -3)$, $\vec{c} = (-1, 2, 1)$.
5. $x = (-5, -5, 5)$, $\vec{a} = (-2, 0, 1)$, $\vec{b} = (1, 3, -1)$, $\vec{c} = (0, 4, 1)$.
6. $x = (13, 2, 7)$, $\vec{a} = (5, 1, 0)$, $\vec{b} = (2, -1, 3)$, $\vec{c} = (1, 0, -1)$.
7. $x = (-19, -1, 7)$, $\vec{a} = (0, 1, 1)$, $\vec{b} = (-2, 0, 1)$, $\vec{c} = (3, 1, 0)$.
8. $x = (3, -3, 4)$, $\vec{a} = (1, 0, 2)$, $\vec{b} = (0, 1, 1)$, $\vec{c} = (2, -1, 4)$.
9. $x = (3, 3, -1)$, $\vec{a} = (3, 1, 0)$, $\vec{b} = (-1, 2, 1)$, $\vec{c} = (-1, 0, 2)$.
10. $x = (-1, 7, -4)$, $\vec{a} = (-1, 2, 1)$, $\vec{b} = (2, 0, 3)$, $\vec{c} = (1, 1, -1)$.
11. $x = (6, 5, -14)$, $\vec{a} = (1, 1, 4)$, $\vec{b} = (0, -3, 2)$, $\vec{c} = (2, 1, -1)$.
12. $x = (6, -1, 7)$, $\vec{a} = (1, -2, 0)$, $\vec{b} = (-1, 1, 3)$, $\vec{c} = (1, 0, 4)$.
13. $x = (5, 15, 0)$, $\vec{a} = (1, 0, 5)$, $\vec{b} = (-1, 3, 2)$, $\vec{c} = (0, -1, 1)$.
14. $x = (2, -1, 11)$, $\vec{a} = (1, 1, 0)$, $\vec{b} = (0, 1, -2)$, $\vec{c} = (1, 0, 3)$.
15. $x = (-1, 2, 1)$, $\vec{a} = (-3, 1, 0)$, $\vec{b} = (1, 1, -2)$, $\vec{c} = (1, 0, 3)$.
16. $x = (-1, 2, 0)$, $\vec{a} = (-3, 1, 0)$, $\vec{b} = (1, 1, -2)$, $\vec{c} = (1, 0, 2)$.
17. $x = (1, 2, 5)$, $\vec{a} = (-3, 1, 5)$, $\vec{b} = (1, 1, -2)$, $\vec{c} = (1, 0, 2)$.
18. $x = (5, 2, 4)$, $\vec{a} = (2, 3, 1)$, $\vec{b} = (4, 2, 1)$, $\vec{c} = (-1, -3, 2)$.
19. $x = (5, 2, 2)$, $\vec{a} = (2, 3, 1)$, $\vec{b} = (4, 2, 1)$, $\vec{c} = (-1, -3, 0)$.
20. $x = (5, 6, 5)$, $\vec{a} = (2, 3, 3)$, $\vec{b} = (1, -1, 1)$, $\vec{c} = (2, 4, 1)$.

Задача 9. Построить на плоскости область решения системы линейных неравенств. Найти координаты получившегося многоугольника. Число n – номер варианта.

Варианты 1–10
$$\begin{cases} ax + by \leq ab, a = 10, \\ bx + ay \leq ab, b = n + 2. \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

Варианты 11–20
$$\begin{cases} ax + by \leq ab, a = 10, \\ x - y \geq -1, b = n - 7. \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

Задача 10. Построить треугольник ABC, найти его периметр и уравнение медианы AM.

- | | |
|---|--|
| 1) A (1, 2), B (3, 7), C (9, 3). | 2) A (-2, 2), B (1, 5), C (7, -1). |
| 3) A (2, 4), B (4, 8), C (8, -2). | 4) A (1, 3), B (3, 9), C (9, 3). |
| 5) A (-2, 1), B (1, 7), C (7, -3). | 6) A (-2, 4), B (4, 6), C (8, -4). |
| 7) A (-1, 3), B (1, 5), C (9, -3). | 8) A (-2, 0), B (1, 5), C (7, -1). |
| 9) A (-1, 4), B (4, 9), C (8, -3). | 10) A (-1, 1), B (2, 5), C (8, -3). |
| 11) A (-4, 0), B (1, 9), C (7, -1). | 12) A (-1, 5), B (4, 9), C (10, -1). |
| 13) A (-3, 0), B (2, 8), C (8, -1). | 14) A (-4, 2), B (2, 9), C (8, -1). |
| 15) A (-1, 3), B (2, 9), C (8, -1). | 16) A (-1, 2), B (1, 8), C (7, -2). |
| 17) A (-2, 2), B (2, 7), C (8, -3). | 18) A (-1, 0), B (0, 9), C (8, -3). |
| 19) A (-1, 5), B (3, 8), C (9, -2). | 20) A (-2, 0), B (4, 7), C (8, -1). |

Задача 11. Исследуйте графически функцию на непрерывность, укажите точки разрыва.

Варианты 1-5.
$$y = \begin{cases} e^{-x}, & \text{если } x \leq 0, \\ n/2, & \text{если } 0 < x < 2, \\ \ln x/2, & \text{если } x \geq 2. \end{cases}$$

Варианты 6-10.
$$y = \begin{cases} e^{2x}, & \text{если } x < 1, \\ n/4, & \text{если } 1 \leq x \leq 4, \\ n/x, & \text{если } x > 4. \end{cases}$$

Варианты 11-15.
$$y = \begin{cases} 5^{-x}, & \text{если } x \leq 1, \\ n/5, & \text{если } 1 < x < 3, \\ \ln (x - 2), & \text{если } x \geq 3. \end{cases}$$

Варианты 16-20. $y = \begin{cases} 2^{2x}, & \text{если } x \leq 1, \\ n/10, & \text{если } 1 < x \leq 3, \\ n/x, & \text{если } x > 3. \end{cases}$

Задача 12. Найти пределы функций, n – номер варианта.

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{nx}{4 + nx} - \frac{nx^2}{n + x^2} \right) \qquad 2) \lim_{x \rightarrow n} \left[\ln(x - n + 2) + \cos \frac{x - n}{3} \right].$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin nx}{2 nx}. \qquad 4) \lim_{x \rightarrow n} \frac{x^2 + nx - 2n^2}{x^2 - nx}.$$

Контрольная работа № 2
(n – номер варианта по журналу)

Задача 1. Найти производную 1-го порядка функции:

Варианты 1–5. а) $y = \ln(n + 2x)$, б) $y = \sqrt{1 + nx}$, в) $y = \frac{\sin nx}{n + \sin nx}$.

Варианты 6–10. а) $y = e^{1 + nx}$, б) $y = (1 + nx)^4$, в) $y = \frac{\cos nx}{n + \cos nx}$.

Варианты 11–15. а) $y = \ln(5 - nx)$, б) $y = \frac{nx}{1 + nx}$, в) $y = x \sin(x + n)$.

Варианты 16–25. а) $y = 5^{1 + nx}$, б) $y = (1 + nx)^5$, в) $y = \ln \frac{x + n}{2x - n}$.

Задача 2. Найти производную 2-го порядка.

Варианты 1–5. $y = x^n e^{nx}$. Варианты 6–10. $y = (x - n) \ln nx$.

Варианты 11–15. $y = nx e^{nx}$. Варианты 16–25. $y = (x + n) \ln nx$.

Задача 3. Найти дифференциал функции.

Варианты 1–5. $y = \sin^2 nx$ в точке $x = \frac{\pi}{4n}$.

Варианты 6–10. $y = \cos^2 nx$ в точке $x = \frac{\pi}{4n}$.

Варианты 11–15. $y = \ln nx$ в точке $x = n$.

Варианты 16–25. $y = \sqrt{n + x}$ в точке $x = n$.

Задача 4. Найти наибольшее и наименьшее значения функций на отрезке.

Варианты 1–5. $y = \sqrt{n^2 - x^2}$, $[-n; n]$.

Варианты 6–10. $y = \frac{nx}{n + x^2}$, $[0; 2n]$.

Варианты 11–15. $y = \frac{x^3}{3} - nx^2$, $[-2; n-5]$.

Варианты 16–25. $y = \frac{nx}{n+x}$, $[0; 2n]$.

Задача 5. Найти пределы в задачах с помощью правила Лопиталя:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin nx}{2nx}$.

б) $\lim_{x \rightarrow n} \frac{x^2 + nx - 2n^2}{x^2 - nx}$.

Задача 6. Решить задачу на экстремальное значение.

Варианты 1–5. Число $4n$ разбить на 2 положительных числа так, чтобы сумма квадрата первого числа с удвоенным вторым числом была наименьшей.

Варианты 6–10. Число n разбить на 2 положительных числа так, чтобы произведение квадрата первого числа на второе было наибольшим.

Варианты 11–15. Число n разбить на 2 положительных числа так, чтобы сумма квадрата первого числа и удвоенного второго числа была наименьшей.

Варианты 16–25. Число $n - 10$ разбить на 2 положительных числа так, чтобы произведение квадрата первого числа на второе было наибольшим.

Задача 7. Найти экстремумы функции и промежутки возрастания и убывания функции.

Варианты 1–10. $y = \frac{x^3}{3} - nx^2$

Варианты 11–25. $y = \frac{x^2}{a-x}$, $a = n - 10$.

Задача 8. Найти смешанные производные 2-го порядка функции двух переменных.

Варианты 1–10. $z = nx^2 + y^3 - nx^2y + n$.

Варианты 11–25. $z = x^3 + ny^3 + nxy^2 - n$.

Задача 9. Найти полный дифференциал функции $u = nx + 2ny + xuz$ в точке $A(1, 0, 2)$.

Задача 10. Найти экстремумы функции 2 переменных.

Варианты 1–5. $z = nx^2 + y^2 - nx - y + n$.

Варианты 6–10. $z = x^2 + ny^2 + x - ny - n$.

Варианты 11–15. $z = nx^2 + y^2 - xy + n$.

Варианты 16–25. $z = x^2 + ny^2 + xy - n$.

Задача 11. Найти формулу вида $y = ax + b$ методом наименьших квадратов. Построить диаграмму рассеяния точек (x, y) и линию $y = ax + b$.

Варианты 1–10

X	1	2	3	4	5
y	0,5	0,5	0,3	0,3	0

Варианты 11–25

x	1	2	3	4	5
y	0	1	1	0,1	0,1

	n	n	n	n	
--	---	---	---	---	--

				n	n
--	--	--	--	---	---

Задача 12. Найти наибольшее значение линейной функции $z = kx + ky$ в области решений системы линейных неравенств:

$$\text{Варианты 1-10} \quad \begin{cases} ax + by \leq ab, a = 10, \\ bx + ay \leq ab, b = n + 2. \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases} \quad k = n.$$

$$\text{Варианты 11-25} \quad \begin{cases} ax + by \leq ab, a = 10, \\ x - y \geq -1, b = n - 7. \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases} \quad k = n - 9.$$

Задача 13. Вычислить интегралы.

$$\text{Варианты 1-5} \quad \text{а) } \int \frac{nx^2 - x + n}{x} dx, \quad \text{б) } \int (2x + n)e^{nx} dx,$$

$$\text{в) } \int_0^1 \sqrt{n+5x} dx, \quad \text{г) } \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(nx+1)^n}.$$

$$\text{Варианты 6-10} \quad \text{а) } \int_1^2 \frac{nx^3 - x^2 + n}{x} dx, \quad \text{б) } \int (nx+1)e^{2x} dx,$$

$$\text{в) } \int \sqrt{nx+5} dx, \quad \text{г) } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n}.$$

$$\text{Варианты 11-25} \quad \text{а) } \int \frac{nx^4 + nx - 3}{x} dx, \quad \text{б) } \int_1^2 (nx+1) \ln x dx,$$

$$\text{в) } \int \sqrt{n-5x} dx, \quad \text{г) } \int_0^{+\infty} \frac{n}{nx+1} dx.$$

Задача 14. Вычислить интеграл методом разложения на простейшие рациональные дроби:

$$\text{а) 1. } \int \frac{x^3 + 1}{x^3 - x^2} dx, \quad 10. \int \frac{4x^4 + 8x^3 - x - 2}{x(x+1)^2} dx, \quad 18. \int \frac{4x dx}{(x^2 - 1)(x+1)},$$

$$2. \int \frac{x^3 - 2x^2 - 2x + 1}{x^3 - x^2} dx, \quad 11. \int \frac{2x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 4x + 1}{x(x-1)^2} dx, \quad 19. \int \frac{dx}{x^3 + x^2},$$

$$3. \int \frac{3x^2 + 1}{(x-1)(x^2 - 1)} dx, \quad 12. \int \frac{3x - x^2 - 2}{x(x+1)^2} dx, \quad 20. \int \frac{x^3 - 4x^2 + 2x - 1}{x^3 - x^2} dx,$$

$$4. \int \frac{x+2}{x^3 - x^2} dx, \quad 13. \int \frac{2x^3 + 1}{x^2(x+1)} dx, \quad 21. \int \frac{6x - 2x^2 - 1}{x^3 - 2x^2 + x} dx,$$

$$\begin{array}{lll}
5. \int \frac{4x^4 + 8x^3 - 3x - 3}{x^3 + 2x^2 + x} dx, & 14. \int \frac{x^3 - 3}{(x-1)(x^2 - 1)} dx, & 22. \int \frac{2x^3 + 2x^2 + 4x + 3}{x^3 + x^2} dx, \\
6. \int \frac{x + 2}{x^3 + x^2} dx, & 15. \int \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 + 2x^2 + x} dx, & 23. \int \frac{x^3 - 4x + 5}{(x^2 - 1)(x - 1)} dx, \\
7. \int \frac{4x^2}{(x^2 - 2x + 1)(x + 1)} dx, & 16. \int \frac{x + 2}{x^3 - 2x^2 + x} dx, & 24. \int \frac{3x^2 + 2}{x(x + 1)^2} dx, \\
8. \int \frac{2x^2 - 2x - 1}{x^2 - x^3} dx, & 17. \int \frac{4x^4 + 8x^3 - 1}{(x^2 + x)(x + 1)} dx, & 25. \int \frac{x + 5}{x^3 - x^2 - x + 1} dx. \\
9. \int \frac{2x^2 - 5x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} dx, & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
\text{б) } 1. \int \frac{(3x + 13)dx}{(x - 1)(x^2 + 2x + 5)}, & 10. \int \frac{(4x^2 + 3x + 17)dx}{(x - 1)(x^2 + 2x + 5)}, & 18. \int \frac{(x^2 + 23)dx}{(x + 1)(x^2 + 6x + 13)}, \\
2. \int \frac{x^2 - 6x + 8}{x^3 + 8} dx, & 11. \int \frac{4x + 2}{x^4 + 4x^2} dx, & 19. \int \frac{(2x^2 + 7x + 7)dx}{(x - 1)(x^2 + 2x + 5)}, \\
3. \int \frac{(12 - 6x)dx}{(x + 1)(x^2 - 4x + 13)}, & 12. \int \frac{(x^2 - 5x + 40)dx}{(x + 2)(x^2 - 2x + 10)}, & 20. \int \frac{(19x - x^2 - 34)dx}{(x + 1)(x^2 - 4x + 13)}, \\
4. \int \frac{(2x^2 + 2x + 20)dx}{(x - 1)(x^2 + 2x + 5)}, & 13. \int \frac{4x - x^2 - 12}{x^3 + 8} dx, & 21. \int \frac{(4x^2 + 38)dx}{(x + 2)(x^2 - 2x + 10)}, \\
5. \int \frac{(x^2 + 3x - 6)dx}{(x + 1)(x^2 + 6x + 13)}, & 14. \int \frac{(x^2 - 13x + 40)dx}{(x + 1)(x^2 - 4x + 13)}, & 22. \int \frac{8dx}{(x + 1)(x^2 + 6x + 13)}, \\
6. \int \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 - 1} dx, & 15. \int \frac{3 - 9x}{x^3 - 1} dx, & 23. \int \frac{(2x^2 + 4x + 20)dx}{(x + 1)(x^2 - 4x + 13)}, \\
7. \int \frac{36dx}{(x + 2)(x^2 - 2x + 10)}, & 16. \int \frac{6 - 9x}{x^3 + 8} dx, & 24. \int \frac{(5x + 13)dx}{(x + 1)(x^2 + 6x + 13)}, \\
8. \int \frac{(9x - 9)dx}{(x + 1)(x^2 - 4x + 13)}, & 17. \int \frac{(4x - 10)dx}{(x + 2)(x^2 - 2x + 10)}, & 25. \int \frac{4x^2 + x + 10}{x^3 + 8} dx. \\
9. \int \frac{7x - 10}{x^3 + 8} dx, & &
\end{array}$$

Контрольная работа № 3

Вариант 1

1. Вычислить двойной интеграл: $\iint_D (12x^2y^2 + 16x^3y^3) dx dy$, $D: x = 1, y = x^2, y = -\sqrt{x}$.

2. Изменить порядок интегрирования: $\int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2+y}}^0 f dx + \int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{-y}}^0 f dx.$
3. Найти действительную часть комплексного числа z , если $z = z_1 + z_2$,
 $z_1 = 2(\cos 60^\circ - i \sin 60^\circ)$; $z_2 = 3(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ).$
4. Найти общее решение дифференциального уравнения
 $4x dx - 3y dy = 3x^2 y dy - 2xy^2 dx.$
5. Найти решение задачи Коши: $y' - y \cdot \operatorname{ctg} x = 2x \sin x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$
6. Найти общее решение дифференциального уравнения $3x^2 e^y dx + (x^3 e^y - 1) dy = 0.$
7. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' x \ln x = y'.$
8. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 3y' + 2y = 1 - x^2.$
9. Найти сумму ряда: $\sum_{n=9}^{\infty} \frac{2}{n^2 - 14n + 48}.$
10. Исследовать на сходимость ряд: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{2^n (n-1)!}.$

Вариант 2

1. Вычислить двойной интеграл: $\iint_D (9x^2 y^2 + 48x^3 y^3) dx dy$, $D: x=1, y=-x^2, y=\sqrt{x}.$
2. Изменить порядок интегрирования: $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^0 f dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f dx.$
3. Найти модуль числа z , если $z = z_1 z_2$, $z_1 = 3 - 2i$, $z_2 = -1 + 4i.$
4. Найти общее решение дифференциального уравнения $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0.$
5. Найти решение задачи Коши: $y' + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$, $y(0) = 0.$
6. Найти общее решение дифференциального уравнения
 $(3x^2 + 4y^2) dx + (8xy + e^y) dy = 0.$

7. Найти общее решение дифференциального уравнения $xy'' + y' = 1$.
8. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - y' = 6x^2 + 3x$.
9. Найти сумму ряда: $\sum_{n=9}^{\infty} \frac{18}{n^2 - 13n + 40}$.
10. Исследовать на сходимость ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}(n^3 + 1)}{(n+1)!}$.

Вариант 3

1. Вычислить двойной интеграл: $\iint_D (36x^2y^2 - 96x^3y^3) dx dy$, $D: x=1, y=-x^3, y=\sqrt[3]{x}$.
2. Изменить порядок интегрирования: $\int_0^1 dy \int_0^y f dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f dx$.
3. Найти аргумент комплексного числа z , если $z = (1 - i\sqrt{3})^{20}$.
4. Найти общее решение дифференциального уравнения $\sqrt{4+y^2} dx - y dy = x^2 y dy$.
5. Найти решение задачи Коши: $y' + y \operatorname{tg} x = \cos^2 x$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$.
6. Найти общее решение дифференциального уравнения $\left(2x - 1 - \frac{y}{x^2}\right) dx - \left(2y - \frac{1}{x}\right) dy = 0$.
7. Найти общее решение дифференциального уравнения $2xy'' = y'$.
8. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - y = x^2 + x$.
9. Найти сумму ряда: $\sum_{n=8}^{\infty} \frac{4}{n^2 - 12n + 35}$.
10. Исследовать на сходимость ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n 2n!}{(2n)!}$.

Вариант 4

1. Вычислить двойной интеграл: $\iint_D (18x^2y^2 + 32x^3y^3) dx dy$, $D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt[3]{x}$.
2. Изменить порядок интегрирования: $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{2-y}} f dx$.
3. Найти $z_1 z_2, \frac{z_1}{z_2}$, если $z_1 = 1 + 2i, z_2 = 2 - i$.
4. Найти общее решение дифференциального уравнения $\sqrt{3+y^2} dx - y dy = x^2 y dy$.
5. Найти решение задачи Коши: $y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x, y(-1) = \frac{3}{2}$.
6. Найти общее решение дифференциального уравнения $(3x^2y + 2y + 3)dx + (x^3 + 2x + 3y^2)dy = 0$.
7. Найти общее решение дифференциального уравнения $xy'' + y' = x + 1$.
8. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - y' = 5(x+2)^2$.
9. Найти сумму ряда: $\sum_{n=8}^{\infty} \frac{36}{n^2 - 11n + 28}$.
10. Исследовать на сходимость ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n \cdot n!}$.

Вариант 5

1. Вычислить двойной интеграл: $\iint_D (27x^2y^2 + 48x^3y^3) dx dy$, $D: x=1, y=x^2, y=-\sqrt[3]{x} (x \geq 0)$.
2. Изменить порядок интегрирования: $\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^0 f dy + \int_{-1}^0 dx \int_x^0 f dy$.
3. Найти $(-1 - i\sqrt{3})^{15}$.
4. Найти общее решение дифференциального уравнения $6x dx - 6y dy = 2x^2 y dy - 3xy^2 dx$.

5. Найти решение задачи Коши: $y' - \frac{1}{x+1}y = e^x(x+1)$, $y(0) = 1$.
6. Найти общее решение дифференциального уравнения $[\sin 2x - 2\cos(x+y)]dx - 2\cos(x+y)dy = 0$.
7. Найти общее решение дифференциального уравнения $\operatorname{tg}x \cdot y'' - y' + \frac{1}{\sin x} = 0$.
8. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 2y' + y = x^2 + x - 1$.
9. Найти сумму ряда: $\sum_{n=7}^{\infty} \frac{6}{n^2 - 10n + 24}$.
10. Исследовать на сходимость ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n(n^2 - 1)}{n!}$.

Вариант 6

1. Вычислить двойной интеграл:

$$\iint_D (18x^2y^2 + 32x^3y^3) dx dy, \quad D: x=1, y=-x^2, y=\sqrt[3]{x} (x \geq 0).$$
2. Изменить порядок интегрирования: $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dy \int_0^{\arcsin y} f dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 dy \int_0^{\arccos y} f dx$.
3. Вычислить $\frac{1+2i}{3-i} + (1-i)^2$.
4. Найти общее решение дифференциального уравнения $x\sqrt{3+y^2} dx + y\sqrt{2+x^2} dy = 0$.
5. Найти решение задачи Коши: $y' + \frac{y}{x} = \sin x$, $y(\pi) = \frac{1}{\pi}$.
6. Найти общее решение дифференциального уравнения $(xy^2 + \frac{x}{y^2})dx + (x^2y - \frac{x^2}{y^3})dy = 0$.
7. Найти общее решение дифференциального уравнения $x^2y'' + xy' = 1$.
8. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - y' = 2x + 3$.

9. Найти сумму ряда: $\sum_{n=7}^{\infty} \frac{54}{n^2 - 9n + 18}$.

10. Исследовать на сходимость ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+2)!}$.

Вариант 7

1. Вычислить двойной интеграл: $\iint_D (18x^2y^2 + 32x^3y^3) dx dy$, $D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt{x}$.

2. Изменить порядок интегрирования: $\int_{-2}^{-1} dy \int_0^{\sqrt{2+y}} f dx + \int_{-1}^0 dy \int_0^{\sqrt{-y}} f dx$.

3. Вычислить $\frac{2+3i}{4-2i} + \frac{1-3i}{2i}$.

4. Найти общее решение дифференциального уравнения $(e^{2x} + 5)dy + ye^{2x}dx = 0$.

5. Найти решение задачи Коши: $y' + \frac{y}{2x} = x^2$, $y(1) = 1$.

6. Найти общее решение дифференциального уравнения $\left(\frac{1}{x^2} + \frac{3y^2}{x^4}\right)dx - \frac{2y}{x^3}dy = 0$.

7. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' \operatorname{ctg} 2x + 2y' = 0$.

8. Найти общее решение дифференциального уравнения $3y'' + y' = 6x - 1$.

9. Найти сумму ряда: $\sum_{n=6}^{\infty} \frac{8}{n^2 - 8n + 15}$.

10. Исследовать на сходимость ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{2n}}{(2n-1)!}$.

Вариант 8

1. Вычислить двойной интеграл: $\iint_D (27x^2y^2 + 48x^3y^3) dx dy$, $D: x=1, y=-x^3, y=\sqrt{x}$.

2. Изменить порядок интегрирования: $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^0 f dx + \int_1^e dy \int_{-1}^{-\ln y} f dx$.

3. Вычислить $\frac{1+i}{(\sqrt{3}+i)(1+i\sqrt{3})}$.

4. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'y\sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}}+1=0$.

5. Найти решение задачи Коши: $y'+\frac{2x}{1+x^2}y=\frac{2x^2}{1+x^2}$, $y(0)=\frac{2}{3}$.

6. Найти общее решение дифференциального уравнения $\frac{dx}{y}-\frac{x+y^2}{y^2}dy=0$.

7. Найти общее решение дифференциального уравнения $x^3y''+x^2y'=1$.

8. Найти общее решение дифференциального уравнения $y''+2y'+1=4x^2$.

9. Найти сумму ряда: $\sum_{n=6}^{\infty} \frac{72}{n^2-7n+10}$.

10. Исследовать на сходимость ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(3n)!}$.

Вариант 9

1. Вычислить двойной интеграл: $\iint_D (4xy+3x^2y^2) dx dy$, $D: x=1, y=x^2, y=-\sqrt{x}$.

2. Изменить порядок интегрирования: $\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f dy + \int_{-1}^0 dx \int_0^{x^2} f dy$.

3. Найти $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$, если $z=(2-i)^2 \cdot (3+4i)$.

4. Найти общее решение дифференциального уравнения $6x dx - 6y dy = 3x^2 y dy - 2xy^2 dx$.

5. Найти решение задачи Коши: $y' - \frac{2x-5}{x^2}y = 5$, $y(2) = 4$.

6. Найти общее решение дифференциального уравнения $\frac{y}{x^2} dx - \frac{xy+1}{x} dy = 0$.

7. Найти общее решение дифференциального уравнения $\operatorname{tg} x \cdot y'' = 2y'$.

8. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + y' = 5x^2 - 1$.

9. Найти сумму ряда: $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{10}{n^2 - 6n + 8}$.

10. Исследовать на сходимость ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$.

Вариант 10

1. Вычислить двойной интеграл: $\iint_D (12xy + 9x^2 y^2) dx dy$, $D: x=1, y=-x^2, y=\sqrt{x}$.

2. Изменить порядок интегрирования: $\int_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^0 f dy + \int_{-\sqrt{3}}^0 dx \int_{\sqrt{4-x^2}-2}^0 f dy$.

3. Найти $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$, если $z = i^8 + \frac{5+i}{1-3i}$.

4. Найти общее решение дифференциального уравнения $x\sqrt{5+y^2} dx + y\sqrt{4+x^2} dy = 0$.

5. Найти решение задачи Коши: $y' + \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x} e^x$, $y(1) = e$.

6. Найти общее решение дифференциального уравнения $\left(xe^x + \frac{y}{x^2}\right) dx - \frac{1}{x} dy = 0$.

7. Найти общее решение дифференциального уравнения $x^4 y'' + x^3 y' = 1$.

8. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 4y' + 4y = x - x^2$.

9. Найти сумму ряда: $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{90}{n^2 - 5n + 4}$.

10. Исследовать на сходимость ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n (n+1)!}{(2n)!}$.

Вариант 11

1. Вычислить двойной интеграл: $\iint_D (8xy + 9x^2 y^2) dx dy$, $D: x=1, y=-x^3, y=\sqrt[3]{x}$.

2. Изменить порядок интегрирования: $\int_0^1 dx \int_{1-x^2}^1 fdy + \int_1^e dx \int_{\ln x}^1 fdy$.
3. Изобразить векторами и записать в тригонометрической и показательной форме комплексное число $z = 2 + 2i$.
4. Найти общее решение дифференциального уравнения $y(4 + e^x)dy - e^x dx = 0$.
5. Найти решение задачи Коши: $y' + \frac{2}{x}y = x^3$, $y(1) = -\frac{5}{6}$.
6. Найти общее решение дифференциального уравнения $e^y dx + (\cos y + xe^y)dy = 0$.
7. Найти общее решение дифференциального уравнения $xy'' + 2y' = 0$.
8. Найти общее решение дифференциального уравнения $7y'' - y' = 12x$.
9. Найти сумму ряда: $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{12}{n^2 - 4n + 3}$.
10. Исследовать на сходимость ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+2)! \cdot 4^n}$.

Вариант 12

1. Вычислить двойной интеграл: $\iint_D (24xy + 18x^2y^2) dx dy$, $D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt[3]{x}$.
2. Изменить порядок интегрирования: $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt[3]{y}} f dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f dx$.
3. Изобразить векторами и записать в тригонометрической и показательной форме комплексное число $z = -1 + i\sqrt{3}$.
4. Найти общее решение дифференциального уравнения $\sqrt{4-x^2}y' + xy^2 + x = 0$.
5. Найти решение задачи Коши: $y' + \frac{y}{x} = 3x$, $y(1) = 1$.
6. Найти общее решение дифференциального уравнения $(y^3 + \cos x)dx + (3xy^2 + e^y)dy = 0$.

7. Найти общее решение дифференциального уравнения $(1+x^2)y'' + 2xy' = x^3$.
8. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 3y' + 2y = 3x^2 + 2x$.
9. Найти сумму ряда: $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{18}{n^2 - n - 2}$.
10. Исследовать на сходимость ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)}$.

Вариант 13

1. Вычислить двойной интеграл:
 $\iint_D (12xy + 27x^2y^2) dx dy, \quad D: x=1, y=x^2, y=-\sqrt[3]{x} (x \geq 0)$.
2. Изменить порядок интегрирования: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} dy \int_0^{\sin y} f dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \int_0^{\cos y} f dx$.
3. Изобразить векторами и записать в тригонометрической и показательной форме комплексное число $z = -5i$.
4. Найти общее решение дифференциального уравнения $2x dx - 2y dy = x^2 y dy - 2xy^2 dx$.
5. Найти решение задачи Коши: $y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1+x^2, \quad y(1) = 3$.
6. Найти общее решение дифференциального уравнения $(5xy^2 - x^3) dx + (5x^2y - y) dy = 0$.
7. Найти общее решение дифференциального уравнения $x^5 y'' + x^4 y' = 1$.
8. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - y = 3x^2 - 2x + 1$.
9. Найти сумму ряда: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{16}{n^2 + 4n + 3}$.
10. Исследовать на сходимость ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (2n+5)}$.

Вариант 14

1. Вычислить двойной интеграл: $\iint_D (8xy + 18x^2y^2) dx dy$, $D: x=1, y=-x^2, y=\sqrt[3]{x} (x \geq 0)$.
2. Изменить порядок интегрирования: $\int_{-2}^{-1} dx \int_{-(2+x)}^0 f dy + \int_{-1}^0 dx \int_{\sqrt[3]{x}}^0 f dy$.
3. Изобразить векторами и записать в тригонометрической и показательной форме комплексное число $z = -3 - 2i$.
4. Найти общее решение дифференциального уравнения $x\sqrt{4+y^2} dx + y\sqrt{1+x^2} dy = 0$.
5. Найти решение задачи Коши: $y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1, y(1) = 1$.
6. Найти общее решение дифференциального уравнения $[\cos(x+y^2) + \sin x] dx + 2y \cos(x+y^2) dy = 0$.
7. Найти общее решение дифференциального уравнения $xy'' - y' + \frac{1}{x} = 0$.
8. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - y' = 4x^2 - 3x + 2$.
9. Найти сумму ряда: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{36}{n^2 + 7n + 10}$.
10. Исследовать на сходимость ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n-1} \sqrt{n^2 + 5}}{(n-1)!}$.

Вариант 15

1. Вычислить двойной интеграл: $\iint_D \left(\frac{4}{5} xy + \frac{9}{11} x^2 y^2 \right) dx dy$, $D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt{x}$.
2. Изменить порядок интегрирования: $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f dx + \int_1^e dy \int_{\ln y}^1 f dx$.
3. Вычислить $\frac{(2+i)(2-i)}{4-3i}$.
4. Найти общее решение дифференциального уравнения $(e^x + 8) dy - ye^x dx = 0$.

5. Найти решение задачи Коши: $y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3}$, $y(1) = 1$.
6. Найти общее решение дифференциального уравнения $(x^2 - 4xy - 2y^2)dx + (y^2 - 4xy - 2x^2)dy = 0$.
7. Найти общее решение дифференциального уравнения $xy'' + y' + x = 0$.
8. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 2y' + y = 12x^2 - 6x$.
9. Найти сумму ряда: $\sum_{n=10}^{\infty} \frac{30}{n^2 - 14n + 48}$.
10. Исследовать на сходимость ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(2n+1)!}{(3n)!}$.

Вариант 16

1. Вычислить двойной интеграл: $\iint_D \left(\frac{4}{5}xy + 9x^2y^2 \right) dx dy$, $D: x=1, y=-x^3, y=\sqrt{x}$.
2. Изменить порядок интегрирования: $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^0 f dx + \int_1^2 dy \int_{-\sqrt{2-y}}^0 f dx$.
3. Вычислить $\frac{1+i}{(\sqrt{3}+i)(1+i\sqrt{3})}$.
4. Найти общее решение дифференциального уравнения $\sqrt{5+y^2} + y'y\sqrt{1-x^2} = 0$.
5. Найти решение задачи Коши: $y' + 2xy = -2x^3$, $y(1) = \frac{1}{e}$.
6. Найти общее решение дифференциального уравнения $\left(\sin y + y \sin x + \frac{1}{x} \right) dx + \left(x \cos y - \cos x + \frac{1}{y} \right) dy = 0$.
7. Найти общее решение дифференциального уравнения $xy'' + y' = \sqrt{x}$.
8. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 4y' = 32 - 384x^2$.

9. Найти сумму ряда: $\sum_{n=9}^{\infty} \frac{54}{n^2 - 11n + 28}$.

10. Исследовать на сходимость ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{2^{n+1} \cdot n!}$.

Вариант 17

1. Вычислить двойной интеграл: $\iint_D (24xy - 48x^3y^3) dx dy$, $D: x=1, y=x^2, y=-\sqrt{x}$.

2. Изменить порядок интегрирования: $\int_0^1 dy \int_{-y}^0 f dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f dx$.

3. Вычислить $(1 - i\sqrt{3})^6$.

4. Найти общее решение дифференциального уравнения $6x dx - y dy = x^2 y dy - 3xy^2 dx$.

5. Найти решение задачи Коши: $y' + \frac{xy}{2(1-x^2)} = \frac{x}{2}$, $y(0) = \frac{2}{3}$.

6. Найти общее решение дифференциального уравнения $2(3xy^2 + 2x^3) dx + 3(2x^2y + y^2) dy = 0$.

7. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' \operatorname{tg} x = y' + 1$.

8. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 2y' + y = 2 - 3x^2$.

9. Найти сумму ряда: $\sum_{n=9}^{\infty} \frac{36}{n^2 - 12n + 35}$.

10. Исследовать на сходимость ряд: $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{2^2} + \frac{3\sqrt{4}}{2^3} + \dots + \frac{n\sqrt{n+1}}{2^n} + \dots$

Вариант 18

1. Вычислить двойной интеграл: $\iint_D (6xy + 24x^3y^3) dx dy$, $D: x=1, y=-x^2, y=\sqrt{x}$.

2. Изменить порядок интегрирования: $\int_0^1 dy \int_0^{y^3} f dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f dx$.

3. Вычислить $(-1 + i)^5$.

4. Найти общее решение дифференциального уравнения $y \ln y + xy' = 0$.
5. Найти решение задачи Коши: $y' + xy = -x^3$, $y(0) = 3$.
6. Найти общее решение дифференциального уравнения $(3x^3 + 6x^2y + 3xy^2)dx + (2x^3 + 3x^2y)dy = 0$.
7. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' \operatorname{tg} 5x = 5y'$.
8. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + y' = 49 - 24x^2$.
9. Найти сумму ряда: $\sum_{n=8}^{\infty} \frac{72}{n^2 - 9n + 18}$.
10. Исследовать на сходимость ряд: $\frac{1}{2 \cdot 1!} + \frac{2^2}{2^2 \cdot 2!} + \frac{3^3}{2^3 \cdot 3!} + \dots + \frac{n^n}{2^n \cdot n!} + \dots$

Вариант 19

1. Вычислить двойной интеграл: $\iint_D (4xy + 16x^3y^3) dx dy$, $D: x=1, y=-x^3, y=\sqrt[3]{x}$.
2. Изменить порядок интегрирования: $\int_0^{\sqrt{3}} dx \int_{\sqrt{4-x^2}-2}^0 f dy + \int_{\sqrt{3}}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^0 f dy$.
3. Вычислить $(2 + i\sqrt{12})^5$.
4. Найти общее решение дифференциального уравнения $(1 + e^x)y' = ye^x$.
5. Найти решение задачи Коши: $y' - \frac{2}{x+1}y = e^x(x+1)^2$, $y(0) = 1$.
6. Найти общее решение дифференциального уравнения $xy^2 dx + y(x^2 + y^2) dy = 0$.
7. Найти общее решение дифференциального уравнения $x^3 y'' + x^2 y' = \sqrt{x}$.
8. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' = 3x^2 + x - 4$.
9. Найти сумму ряда: $\sum_{n=8}^{\infty} \frac{12}{n^2 - 10n + 24}$.

10. Исследовать на сходимость ряд: $\frac{25}{2} + \frac{45}{2^2} + \frac{65}{2^3} + \frac{85}{2^4} + \dots$

Вариант 20

1. Вычислить двойной интеграл: $\iint_D (4xy + 16x^3 y^3) dx dy$, $D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt[3]{x}$.

2. Изменить порядок интегрирования: $\int_{-2}^{-1} dy \int_{-(2+y)}^0 f dx + \int_{-1}^0 dy \int_{\sqrt[3]{y}}^0 f dx$.

3. Вычислить $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{12}$.

4. Найти общее решение дифференциального уравнения $\sqrt{1-x^2} y' + xy^2 + x = 0$.

5. Найти решение задачи Коши: $y' + 2xy = xe^{-x^2} \sin x$, $y(0) = 1$.

6. Найти общее решение дифференциального уравнения $3x^2 e^y dx + (x^3 e^y - 1) dy = 0$.

7. Найти общее решение дифференциального уравнения $(x+1)y'' + y' = (x+1)$.

8. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 13y' + 12y = x - 1$.

9. Найти сумму ряда: $\sum_{n=7}^{\infty} \frac{18}{n^2 - 7n + 10}$.

10. Исследовать на сходимость ряд: $\frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \frac{1}{\sqrt[4]{3}} + \dots$

Вариант 21

1. Вычислить двойной интеграл: $\iint_D (44xy + 16x^3 y^3) dx dy$, $D: x=1, y=x^2, y=-\sqrt[3]{x}$.

2. Изменить порядок интегрирования: $\int_0^1 dy \int_0^y f dx + \int_1^e dy \int_{\ln y}^1 f dx$.

3. Даны комплексные числа $z_1 = 5 - 12i$, $z_2 = -6 + 8i$. Найти мнимую часть чисел

$$z_1 + z_2, \frac{z_1}{z_2}.$$

4. Найти общее решение дифференциального уравнения $6xdx - 2ydy = 2yx^2dy - 3xy^2dx$.
5. Найти решение задачи Коши: $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$, $y(0) = \frac{1}{2}$.
6. Найти общее решение дифференциального уравнения $(3x^2 + 4y^2)dx + (8xy + e^y)dy = 0$.
7. Найти общее решение дифференциального уравнения $(1 + \sin x)y'' = \cos x \cdot y'$.
8. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + y' = x$.
9. Найти сумму ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2 + 12n - 5}$.
10. Исследовать на сходимость ряд: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{2^n(n-1)!}$.

Вариант 22

1. Вычислить двойной интеграл: $\iint_D (4xy + 176x^3y^3) dx dy$, $D: x=1, y=-x^2, y=\sqrt[3]{x}$.
2. Изменить порядок интегрирования: $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f dy$.
3. Даны комплексные числа $z_1 = 5 - 12i$, $z_2 = -6 + 8i$. Найти мнимую часть чисел $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$.
4. Найти общее решение дифференциального уравнения $y(1 + \ln y) + xy' = 0$.
5. Найти решение задачи Коши: $y' - y \cos x = -\sin 2x$, $y(0) = 3$.
6. Найти общее решение дифференциального уравнения $\left(2x - 1 - \frac{y}{x^2}\right)dx - \left(2y - \frac{1}{x}\right)dy = 0$.
7. Найти общее решение дифференциального уравнения $xy'' + y' = \frac{1}{\sqrt{x}}$.
8. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - y' = 6x + 5$.

9. Найти сумму ряда: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{24}{9n^2 - 12n - 5}$.

10. Исследовать на сходимость ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(2n)!}$.

Вариант 23

1. Вычислить двойной интеграл: $\iint_D (xy - 4x^3 y^3) dx dy$, $D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt{x}$.

2. Изменить порядок интегрирования: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} dx \int_0^{\sin x} f dy + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\cos x} f dy$.

3. Комплексные числа $z_1 = 1 - i$, $z_2 = -\sqrt{3} - i$ представить в тригонометрической форме и найти $z_1 \cdot z_2$.

4. Найти общее решение дифференциального уравнения $(3 + e^x)yy' = e^x$.

5. Найти решение задачи Коши: $y' - 4xy = -4x^3$, $y(0) = -\frac{1}{2}$.

6. Найти общее решение дифференциального уравнения $(3x^2 y + 2y + 3)dx + (x^3 + 2x + 3y^2)dy = 0$.

7. Найти общее решение дифференциального уравнения $-xy'' + 2y' = \frac{2}{x^2}$.

8. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 3y' + 2y = x^2 + 2x + 3$.

9. Найти сумму ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2 + 6n - 8}$.

10. Исследовать на сходимость ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+2)!}{3n+5} \cdot \frac{1}{2^n}$.

Вариант 24

1. Вычислить двойной интеграл: $\iint_D (4xy + 176x^3 y^3) dx dy$, $D: x=1, y=-x^3, y=\sqrt{x}$.

2. Изменить порядок интегрирования: $\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f dx + \int_{-1}^0 dy \int_y^0 f dx$.
3. Комплексные числа $z_1 = 1 - i$, $z_2 = -\sqrt{3} - i$ представить в тригонометрической форме и найти $\frac{z_1}{z_2}$.
4. Найти общее решение дифференциального уравнения $\sqrt{3+y^2} + \sqrt{1-x^2} yy' = 0$.
5. Найти решение задачи Коши: $y' - \frac{y}{x} = -\frac{\ln x}{x}$, $y(1) = 1$.
6. Найти общее решение дифференциального уравнения $[\sin 2x - 2\cos(x+y)]dx - 2\cos(x+y)dy = 0$.
7. Найти общее решение дифференциального уравнения $x^4 y'' + x^3 y' = 4$.
8. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 5y' + 6y = (x-1)^2$.
9. Найти сумму ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{9n^2 + 21n - 8}$.
10. Исследовать на сходимость ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n n!}$.

Вариант 25

1. Вычислить двойной интеграл: $\iint_D \left(6x^2 y^2 + \frac{25}{3} x^4 y^4 \right) dx dy$, $D: x=1, y=x^2, y=-\sqrt{x}$.
2. Изменить порядок интегрирования: $\int_0^1 dx \int_0^{x^3} f dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f dy$.
3. Изобразить векторами и записать в тригонометрической и показательной форме комплексное число $z = -\sqrt{3} - i$.
4. Найти общее решение дифференциального уравнения $x dx - y dy = yx^2 dy - xy^2 dx$.
5. Найти решение задачи Коши: $y' - 3x^2 y = \frac{1}{3} x^2 (1 + x^3)$, $y(0) = 0$.

6. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$(xy^2 + \frac{x}{y^2})dx + (x^2y - \frac{x^2}{y^3})dy = 0.$$

7. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + \frac{2x}{x^2 + 1}y' = 2x$.

8. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 6y' + 9y = 3x - 1$.

9. Найти сумму ряда: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{4n^2 + 8n + 3}$.

10. Исследовать на сходимость ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n(n^2 - 1)}{n!}$.

Контрольная работа № 4

Задача 1

1. В наборе 6 белых и 12 черных шаров. Извлекают наугад 2 шара. Найти вероятность того, что: а) оба шара черные, б) только один шар черный, в) хотя бы один шар черный.
2. В первой группе 25 студентов, во второй – 20. Вероятность сдачи экзамена каждым студентом равна 0,8. Из каждой группы выбирают по одному студенту. Найти вероятность того, что: а) они оба сдадут экзамен; б) хотя бы один сдаст; в) только один сдаст экзамен.
3. Бросают два игральных кубика. Какова вероятность появления: а) двух пятерок; б) одной пятерки; в) хотя бы одной пятерки?
4. Студент знает 7 из 10 экзаменационных вопросов. Наугад предлагают два вопроса. Найти вероятность того, что он знает ответ на: а) два вопроса, б) только на один вопрос, в) хотя бы на один вопрос.
5. В ящике 10 деталей, из них 3 нестандартные. Наугад извлекают две детали. Найти вероятность того, что: а) они обе нестандартные, б) только одна деталь нестандартная, в) хотя бы одна деталь нестандартная.
6. Бросают два игральных кубика. Какова вероятность появления: а) двух четверок; б) одной четверки; в) хотя бы одной четверки?
7. Вероятность выигрыша по лотерейному билету равна $1/5$. Куплено два билета. Какова вероятность того, что выигрышными являются: а) оба билета, б) один билет, в) хотя бы один билет?
8. Вероятность выигрыша по лотерейному билету равна $1/7$. Куплено 3 билета. Какова вероятность того, что выигрышными являются: а) все билеты, б) один билет, в) хотя бы один билет?

9. В среднем 90 % выпускаемых деталей являются стандартными. Найти вероятность того, что среди взятых двух деталей нестандартных будет: а) две; б) только одна; в) хотя бы одна.
10. В круг наугад бросают точки. Вероятность попадания первой точки равна 0,7, а второй – 0,8. Найти вероятность того, что в круг попадет: а) две точки; б) только одна; в) хотя бы одна точка.
11. В среднем 80 % выпускаемых деталей являются стандартными. Найти вероятность того, что среди взятых двух деталей нестандартных будет: а) две; б) только одна; в) хотя бы одна.
12. В квадрат наугад бросают точки. Вероятность попадания первой точки равна 0,7, а второй – 0,9. Найти вероятность того, что в квадрат попадает: а) две точки; б) только одна; в) хотя бы одна.
13. В наборе 9 белых и 11 черных шаров. Извлекают наугад два шара. Найти вероятность того, что: а) оба шара черные, б) только один шар черный, в) хотя бы один шар черный.
14. В первой группе 15 студентов, во второй – 20. Вероятность сдачи экзамена каждым студентом равна 0,7. Из каждой группы выбирают по одному студенту. Найти вероятность того, что: а) они оба сдадут экзамен; б) хотя бы один сдаст; в) только один сдаст.
15. Студент знает 7 из 10 экзаменационных вопросов. Наугад предлагают три вопроса. Найти вероятность того, что он знает ответ на: а) три вопроса, б) только на один вопрос, в) хотя бы на один вопрос.
16. В ящике 12 деталей, 3 из них нестандартных. Наугад извлекают 3 детали. Найти вероятность того, что: а) они все нестандартные, б) только одна деталь нестандартная, в) хотя бы одна деталь нестандартная.
17. Вероятность выигрыша по лотерейному билету равна $1/8$. Куплено 3 билета. Какова вероятность того, что выигрышными являются: а) все билеты, б) два билета, в) хотя бы один билет?
18. В среднем 90 % выпускаемых деталей являются стандартными. Найти вероятность того, что среди взятых трех деталей нестандартных будет: а) две; б) хотя бы одна; в) все.
19. В наборе 8 белых и 7 черных шаров. Извлекают наугад 3 шара. Найти вероятность того, что: а) все шары черные, б) только один шар черный, в) хотя бы один шар черный.
20. В круг наугад бросают точки. Вероятность попадания первой точки равна 0,6, а второй – 0,8. Найти вероятность того, что в круг попадет: а) 2 точки, б) только одна, в) хотя бы одна точка.

Задача 2

Варианты 1-5.

На сборку поступает 30 % деталей с 1-го станка, 30 % деталей со 2-го и 40% с 3-го. Вероятность изготовления бракованных деталей соответственно равны $0,0N$; $0,0N$; $0,07$. Найти вероятность того, что взятая деталь является бракованной. Цифра N - номер варианта.

Варианты 6-10

В первой группе N студентов, во 2-ой – $N+5$. Вероятность сдачи экзамена для студента 1-ой группы равна $0,7$, для 2-ой – $0,8$. Наугад выбирают группу и из нее одного студента. Какова вероятность, что он сдаст экзамен? Число N – номер варианта.

Варианты 11-15

Студент знает 10 из N вопросов 1-ой темы и N из 18 вопросов 2-ой темы. Наугад выбирают тему и из нее 1 вопрос. Известно, что студент не ответил. Найти вероятность, что ему предложен вопрос из 2-ой темы.

Варианты 15-20

На сборку поступило деталей с первого станка в два раза больше, чем со второго. Вероятность изготовления бракованной детали на 1-ом станке – $0,0N$, на 2-ом – $0,05$. Взятая деталь оказалась бракованной. Какова вероятность того, что она изготовлена на первом станке? Цифра N равна разности между номером варианта и числом 13 .

Задача 3

Варианты 1-10

Монета подброшена $n+3$ раза. Найти вероятность того, что герб выпадет менее двух раз.

Варианты 11-20

В среднем 80% саженцев приживаются. Найти вероятность того, что из $n-7$ саженцев приживется не менее двух.

Задача 4

Варианты 1-10

В среднем 10% выпускаемых изделий являются нестандартными. Найти вероятность того, что среди отобранных 400 для проверки изделий, стандартных будет: а) $390+N$; б) от 350 до $360+N$. Число N – номер варианта.

Варианты 11-20

В среднем 90% изготавливаемых деталей являются стандартными. Найти вероятность того, что нестандартных деталей из 100 отобранных для проверки будет N штук; от 8 до N .

Задача 5

Варианты 1-10

Вероятность поломки изделия при перевозке равна $0,01$. Найти вероятность поломки менее 2 -х изделий при перевозке $100 \cdot N$ изделий. Число N равно номеру варианта.

Варианты 11-20

Прибор состоит из 50 независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого из них за время t равна $0,02$. Найти вероятность того, что за это время откажут $N-9$ элементов. Число N – номер варианта.

Задача 6

Варианты 1-10

Найти числовые характеристики, построить график функции распределения $F(x)$ дискретной случайной величины X :

X	n	$n+2$	$n+4$
p	0.4	0.5	0.1

Варианты 11-20

Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$. Найти ее числовые характеристики, построить график $F(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0, \\ \frac{x}{n}, & \text{если } 0 < x \leq n, \\ 1, & \text{если } x > n. \end{cases}$$

Задача 7

Найти вероятность попадания нормально распределенной случайной величины X в интервале $N < X < N + 3$, если $a = N + 1$, $D(X) = 4$. Число N – номер варианта.

Математическая статистика

Задача 1

Из генеральной совокупности извлечена выборка. Найти x_B, σ_B , построить полигон частот. Число k – номер варианта.

x_i	k	$k + 1$	$k + 2$	$k + 3$	$k + 5$
n_i	5	12	18	11	4

Задача 2

Выборка задана интервально. Найти ее среднее значение, построить гистограмму частот (варианты 1 – 10) и относительных частот (варианты 11 – 20). Число k – номер варианта.

x_i	$(k, k + 2)$	$(k + 2, k + 4)$	$(k + 4, k + 6)$	$(k + 6, k + 8)$	$(k + 8, k + 10)$
n_i	4	10	14	12	10

Задача 3

Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания «а» нормальной случайной величины X с надежностью $\gamma = 0,95$, если известны выборочная средняя $\bar{x}_g = k$. Объем выборки $n = 100$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma = 3$.

Задача 4

По 10 промышленным предприятиям одной отрасли известны данные за 1 месяц.

- 1) Найти уравнение прямолинейной регрессии фонда заработной платы Y от объема валовой продукции X .
- 2) Определить выборочный коэффициент корреляции r_b .
- 3) Постройте диаграмму рассеяния и линию регрессии.
- 4) Используя уравнение регрессии, найдите ожидаемое среднее значение Y при $X = 15$ млн руб. Число k – номер варианта.

№	Валовая продукция, млн руб.	Фонд заработной платы, млн руб.
1	5	$1,1 + 0,1 k$
2	6	$1,3 + 0,1 k$
3	7	$1,4 + 0,1 k$
4	8	$1,6 + 0,1 k$
5	9	$1,5 + 0,1 k$
6	10	$1,8 + 0,1 k$
7	11	$2,0 + 0,1 k$
8	12	$2,3 + 0,1 k$
9	13	$2,4 + 0,1 k$
10	14	$2,5 + 0,1 k$

Задача 5

На уровне значимости $\alpha = 0,01$ проверить гипотезу H_0 о нормальном распределении генеральной совокупности по результатам выборки. Число k равно номеру варианта.

n_i	$8 + k$	$16 + k$	$40 + k$	$72 + k$	$36 + k$	$18 + k$	$10 + k$
n'_i	$6 + k$	$18 + k$	$36 + k$	$76 + k$	$39 + k$	$18 + k$	$7 + k$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Основная литература

1. Шипачев, В.С. Высшая математика: учебник для вузов/ В.С. Шипачев. – М.: Высшая школа, 2001. – 479 с.
2. Шипачев, В.С. Задачник по высшей математике: учебное пособие для вузов / В.С. Шипачев. – М.: Высшая школа, 2003. – 304 с.
3. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: учебник для втузов/ Н.С. Пискунов. – М.: Интеграл-пресс, 2009. – 416 с.
4. Клетеник, Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии: учебное пособие для втузов/ Д.В. Клетеник; под ред. Н.В. Ефимова. – СПб.: Профессия, 2005. – 200 с.
5. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс/ Д.Т. Письменный. – М.: Айрис-пресс, 2007. – 608 с.
6. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учебное пособие/ В.Е. Гмурман. – М.: Высшее

образование, 2008. – 404 с.

7. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие/ В.Е. Гмурман. – М.: Высшее образование, 2009. – 479 с.

Дополнительная литература

1. Выгодский, М.Я. Справочник по элементарной математике/ М.Я. Выгодский. – М.: Наука, 1986. – 317 с.

2. Иванова, Е.Е. Дифференциальное исчисление функций одного переменного: учебник для вузов/ Е. Е. Иванова; под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006. – 408 с.

3. Агафонов, С.А. Дифференциальные уравнения: учеб. для втузов/ С.А. Агафонов, А.Д. Герман, Т.В. Муратова; Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006. – 347 с.

4. Ванько, В.И. Вариационное исчисление и оптимальное управление: учебник для вузов/ В.И. Ванько, О.В. Ермошина, Г.Н. Кувыркин; под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006. – 487 с.

5. Мартинсон, Л. К. Дифференциальные уравнения математической физики: учеб. для втузов/ Л.К. Мартинсон, Ю.И. Малов; под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006. – 367 с.

6. Дискретная математика: учебное пособие для вузов/ В.Г. Данилов, В.Л. Дубнов, А.Р. Лакерник, А.М. Райцин. – М.: Горячая линия-Телеком, 2008. – 135 с.

7. Власова, Е.А. Ряды: учебник для втузов/ Е.А. Власова; под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006. – 611 с.

8. Мышкис, А.Д. Математика для технических вузов: специальные курсы/ А.Д. Мышкис. – СПб.: Лань, 2009. – 640 с.

9. Сборник задач по высшей математике: Линейная алгебра. Аналитическая геометрия. Основы математического анализа. Комплексные числа: с контрольными работами: учебное пособие/ К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный, С.Н. Федин и др. – М.: Айрис-пресс, 2009. – 576 с.

10. Сборник задач по высшей математике: Ряды и интегралы. Векторный и комплексный анализ. Дифференциальные уравнения. Теория вероятностей. Операционное исчисление: с контрольными работами: 2 курс/ К.Н. Лунгу, В.П. Норин, Д.Т. Письменный и др.; под ред. С.Н. Федина. – М.: Айрис-пресс, 2009. – 592 с.

11. Дрозин, А.Д. Краткий справочник по высшей математике/ А.Д. Дрозин, Л.Д. Менихес, Е.А. Резников. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2001. – 26 с.

12. Напалкова, Е.А. Дифференциальные уравнения: учебное пособие/ Е.А. Напалкова; под ред. В.И. Киселева. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2008. – 39 с.

13. Плотникова, Н. В. Вычислительная математика: конспект лекций/ Н.В. Плотникова, И.В. Чернецкая. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2004. – 58 с.

14. Дутикова, Е.В. Комплексные числа: учебное пособие/ Е.В. Дутикова, М.В. Тимощенко. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2008. – 31 с.
15. Тимощенко, М.В. Дифференциальные уравнения: курс лекций/ М.В. Тимощенко. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2006. – 70 с.
16. Вентцель, Е.С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения/ Е.С. Вентцель. – М.: Наука, 1988. – 480 с.
17. Горелова, Г.В. Теория вероятностей и математическая статистика в примерах и задачах с применением Excel: учебное пособие для студентов вузов / Горелова Г.В., Кацко И.А. – Ростов-на-Дону: Феникс, 2006. – 475 с.
18. Теория вероятностей: учебник для вузов/ А.В. Печинкин, О.И. Тескин, Г.М. Цветкова и др.; Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 2006. – 456 с.
19. Яковлев, В.П. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие/ В.П. Яковлев. – М.: Дашков, 2008. – 184 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ
Обложка тетради

Южно-Уральский государственный университет

Электротехнический факультет

Контрольная работа № _____

по _____
наименование дисциплины

выполнил студент-заочник _____ курса

Фамилия, имя, отчество (полностью)

ШИФР _____ ГРУППА _____

« ____ » _____ 20 ____ г.
Срок представления работы по графику

« ____ » _____ 20 ____ г.
Дата отправки работы

ЗАПОЛНЕННЫЙ БЛАНК СЛЕДУЕТ НАКЛЕИТЬ НА ОБЛОЖКУ ТЕТРАДИ

№ _____ по журналу

« ____ » _____ 20 ____ г.

Отметка о зачете или незначете работы

Фамилия, инициалы преподавателя

Подпись преподавателя, дата

Работа с рецензией предъявляется экзаменатору при сдаче экзамена или зачета

----- линия отрыва

Адрес университета: 456320, г. Миасс, пр. Октября, 16, Электротехнический факультет