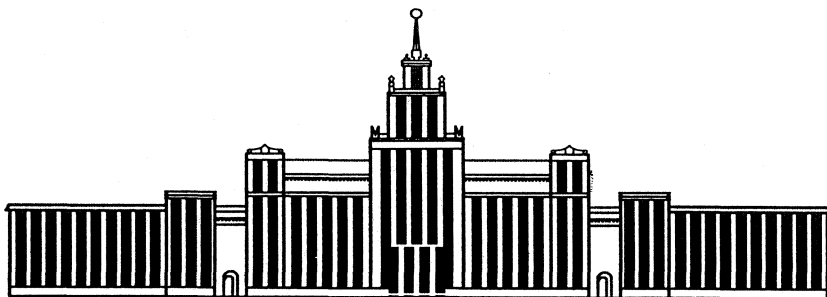

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ



ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

629.78(07)

A941

В.А. Афанасьев

**АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧАХ
УПРАВЛЕНИЯ ТЕХНИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ**

Учебное пособие

Челябинск

2009

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Южно-Уральский государственный университет
Филиал в г. Миассе
Электротехнический факультет
Кафедра «Прикладная информатика и математика»

629.78(07)
А941

В.А. Афанасьев

**АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ ТЕХНИЧЕСКИМИ
СИСТЕМАМИ**

Учебное пособие

Челябинск
Издательский центр ЮУрГУ
2009

УДК 629.782(075.8)+517.91(075.8)
А941

Одобрено
учебно-методической комиссией электротехнического факультета

Рецензенты:
Н.Н. Тихонов, Ю.А. Мокин

А941 Афанасьев, В.А.
Аналитическое решение дифференциальных уравнений в задачах управления техническими системами: учебное пособие / В.А. Афанасьев – Челябинск: Изд. центр ЮУрГУ, 2009. – 24 с.

Рассмотрены аналитические решения трёх различных систем дифференциальных уравнений, по-разному описывающих одно физическое явление – приземление многоцветного космического аппарата (МКА). По каждому из них формируется программный закон торможения силой тяги ракетного двигателя, обеспечивающий мягкое приземление МКА. Для каждого закона управления определяются проектные параметры МКА, по которым выбирается наилучший вариант проекта МКА.

Учебное пособие предназначено для студентов старших курсов машиностроительного факультета.

УДК 629.782(075.8)+517.91(075.8)

© Издательский центр ЮУрГУ, 2009

Предисловие

Курсовая работа направлена на получение математического обеспечения для разработки законов и алгоритмов управления техническими системами, которые используются в проектировании и последующей эксплуатации готовых изделий. В качестве примеров выбраны многоразовые космические аппараты (МКА), совершающие мягкое вертикальное приземление с помощью реактивных сил того же ракетного двигателя, с помощью которого выполняется разгон для выхода на околоземную орбиту.

Выполнение курсовой работы по данному методическому пособию знакомит студентов старших курсов со следующими понятиями высшей математики:

- обыкновенные дифференциальные уравнения в решении физических задач;
 - задача Коши;
 - краевая задача;
 - аналитическое решение дифференциальных уравнений;
 - экстремум и оптимальное управление;
 - приближённое решение нелинейных алгебраических уравнений;
- а также с понятиями практического применения математики:
- проектные параметры;
 - программный закон управления;
 - управление по обратной связи;
 - алгоритм управления.

После получения исходных данных и начальных условий работа студента состоит в проведении расчётов, занесении результатов в таблицы и получении выводов в порядке, указанном в настоящем учебном пособии.

Введение

Дифференциальные уравнения нашли широкое применение для адекватного описания многих физических явлений с участием технических систем. Они широко используются при исследовании динамики полёта и формировании управлений различных летательных аппаратов (ЛА). Одной из актуальных современных задач является создание многоразовых космических аппаратов (МКА), которые после вывода полезной нагрузки на околоземную орбиту возвращаются на Землю и после непродолжительной подготовки снова готовы к запуску. Наиболее ответственная задача МКА – это мягкое приземление, которое может выполняться различными способами, наиболее перспективным из которых представляется использование ракетных двигателей (РД) – тех же двигателей, с помощью которых производится разгон МКА для выхода на орбиту. Применение одних и тех же РД в последовательном решении задач одного полётного задания, в том числе для маневрирования в космосе, позволяет уменьшить габариты и массу, упростить проектирование, повысить надёжность и безопасность эксплуатации и, как следствие, уменьшить удельную стоимость выводимой и возвращаемой полезной нагрузки.

Задача приземления МКА – это одна из частных задач общей проблемы создания и управления многих ЛА, в которой разработка законов управления и проектирование неразрывно связаны друг с другом, начиная с ранних этапов проектирования и кончая эксплуатацией готового изделия.

Управление тормозящей силой тяги в полёте проводится по определённому алгоритму управлению, основу которого составляют законы управления, определяемые из аналитических решений дифференциальных уравнений движения, нахождению которых посвящена курсовая работа. Результаты методического пособия являются развитием результатов, представленных в работе [1].

Математическая модель и управление торможением МКА

Вертикальное приземление МКА на Землю с помощью ракетных двигателей достаточно строго описывается системой из трёх обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} m\dot{V} &= -X - P + G + F, \\ \dot{h} &= -V, \\ \dot{m} &= -P/W, \end{aligned} \tag{1}$$

где m – масса МКА; V – скорость падения; h – высота над поверхностью; $X = C_x \rho V^2 / 2$ – сила лобового сопротивления; C_x – коэффициент силы лобового сопротивления; ρ – плотность атмосферы; P – тормозящая сила тяги ракетного двигателя; $W = I g_k$ – скорость истечения частиц сгорания ракетного топлива; I – удельный импульс двигателя; G – сила притяжения Земли; F – возмущающая сила; $g_k = \text{const} = 9,80665 \text{ м/с}^2$.

Первое уравнение из (1) описывает динамику вертикального движения МКА, второе – это кинематическое уравнение и третье уравнение описывает динамику работы ракетного двигателя.

Система (1) решается с начальными условиями:

$$t = t_0, V(t_0) = V_0, h(t_0) = h_0, m(t_0) = m_0. \quad (2)$$

При задании конечных условий, требуемых для мягкого приземления,

$$t = t_k < \infty, V(t_k) = V_k = 0, h(t_k) = h_k = 0, m(t_k) = m_k > 0, \quad (3)$$

где ограниченное время t_k заранее не задаётся, а конечная масса m_k определяется запасом топлива ракетных двигателей, задача решения дифференциальных уравнений (1) становится краевой задачей с начальными условиями (2) и конечными параметрами (3). В общем случае решение краевой задачи сводится к вариации свободных функций и многократному интегрированию системы (1), (2), (3) до выполнения конечных условий (3) с заданной точностью:

$$V_k \leq \varepsilon_v, h_k \leq \varepsilon_h, \quad (4)$$

где $\varepsilon_v > 0, \varepsilon_h > 0$ – заданные константы.

Под свободной функцией понимается такая функция в системе (1), изменение или варьирование которой обеспечивает регулирование физического параметра в МКА. Одним из регулируемых параметров МКА является сила тяги P ракетного двигателя, величина которой пропорциональна массовому секунднему расходу топлива \dot{m} .

Таким образом, решение краевой задачи (1), (2), (3), (4) выражается в виде программного закона регулирования силы тяги:

$$P = f(t), t \in [t_0, t_k], \quad (5)$$

которое используется в бортовых алгоритмах управления двух типов.

Первый тип алгоритма управления – это управление по обратной связи с заданной или формируемой в полёте программой:

$$P = P(t), t \in [t_0, t_k]. \quad (6)$$

Программная траектория движения, соответствующая управлению (6) и вычисленная в начале торможения по замеренным в этот момент параметрам движения, выдерживается вплоть до контакта МКА с поверхностью по определённому алгоритму на основе сравнения текущих замеряемых и программных параметров движения и выработки по их рассогласованиям текущего значения (или отклонения от программного значения) силы тяги ракетного двигателя.

Второй тип алгоритмов управления основан на непрерывном вычислении с некоторым шагом в процессе торможения новых программ управления:

$$P_i = P_i(t), t \in [t_i, t_k) \subset [t_0, t_k), i = \overline{0, k-1}. \quad (7)$$

Эти программы можно выдерживать по принципу алгоритмов первого типа. Но если обновление программ выполняется достаточно быстро, а это возможно благодаря аналитическим решениям, то в каждый момент торможения выдерживается кусок соответствующего программного управления, который в силу малости шага торможения принимается постоянным:

$$P_i = \text{const}, t \in [t_i, t_{i+1}) \subset [t_i, t_k), i = \overline{0, k-1}. \quad (8)$$

Интегрирование системы дифференциальных уравнений (1) достаточно успешно выполняется различными численными методами. Однако, получая численные результаты, можно проследить закономерности, важные для практического применения закона регулирования силы тяги. В этом смысле трудно переоценить значение аналитических решений дифференциальных уравнений (1), которые, кроме того, дают контрольные решения для проверки правильности численных решений.

Аналитические решения дифференциальных уравнений удаётся получить для так называемых модельных систем, образуемых из (1) при различных допущениях и упрощениях. При этом возникает вопрос, какое из решений или какая модельная система «лучше»? Ответ следует из сравнения проектных параметров МКА, участвующих в проектировании МКА и которыми являются: максимальная сила тяги, диапазон регулирования силы тяги, полный расход топлива, число включений - выключений двигателя, динамика нарастания и спада тяги и др.

Общим допущением для всех модельных систем является предположение о постоянстве ускорения силы притяжения $g = \text{const}$, и отсутствии возмущений, $F = 0$. Аналитические решения дифференциальных уравнений получены на основе табличных неопределённых интегралов, обширный список которых приведён в справочнике [2].

1. Простейшая модельная система

Самая простая модельная система образуется из (1) в предположении отсутствия атмосферы, $\rho = 0$, и постоянства массы, $m = \text{const}$. После деления первого уравнения в (1) на массу, приходим к уравнениям:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -n + g, \\ \dot{h} &= -V \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $n = P/m$ – тормозящее ускорение, $g = g_k$.

Непосредственное интегрирование первого уравнения из (1.1) с начальными условиями (2) даёт:

$$dV = -(n - g)dt, \quad V(t) = V_0 - (n - g)(t - t_0). \quad (1.2)$$

В конечный момент, $t = t_k$, скорость равна нулю $V(t_k) = 0$, и при $t_0 = 0$ имеем:

$$n - g = \frac{V_0}{t_k}. \quad (1.3)$$

Интегрируя непосредственно второе уравнение из (1.1) с учётом (1.2), получаем:

$$h(t) = h_0 - V_0(t - t_0) + \frac{n - g}{2}(t - t_0)^2. \quad (1.4)$$

Выражения (1.2) и (1.4) определяют решение задачи приземления в виде текущих параметров движения в функции времени.

Подстановка в (1.4) $t = t_k$, $h(t_k) = 0$, $t_0 = 0$, с учётом (1.3) даёт выражение для определения программы тормозящего ускорения:

$$n = g + \frac{V_0^2}{2h_0}, \quad (1.5)$$

подстановка которого в (1.3) определяет время до момента касания поверхности:

$$t_k = 2 \frac{h_0}{V_0}. \quad (1.6)$$

Величина силы тяги определяется по формуле:

$$P = m_0 n = m_0 \left(g + \frac{V_0^2}{2h_0} \right), \quad (1.7)$$

массовый секундный расход рассчитывается из соотношения:

$$|\dot{m}| = \frac{P}{W}, \quad (1.8)$$

полный расход топлива на приземление составляет:

$$\Delta m_k = m_0 - m_k = |\dot{m}| t_k. \quad (1.9)$$

Рассмотрим примеры.

Пример 1.1: $m_0 = 40$ т, $h_0 = 1000$ м, $V_0 = 100$ м/с.

$$t_k = 2 \frac{1000}{100} = 20 \text{ с}, \quad n = 9,81 + \frac{100^2}{2 \cdot 1000} = 14,81 \text{ м/с}^2,$$

$$P = 40 \cdot 000 \cdot 14,81 = 592,4 \text{ кН},$$

$$|\dot{m}| = 592 \cdot 400 / 2500 = 236,96 \text{ кг/с}, \quad m_k = 40 \cdot 000 - 236,96 \cdot 20 = 35 \cdot 260,8 \text{ кг}.$$

Полный расход топлива: $\Delta m_k = 40 \cdot 000 - 35 \cdot 260,8 = 4739,2$ кг.

Пример 1.2: $m_0 = 40$ т, $h_0 = 500$ м, $V_0 = 100$ м/с.

$$t_k = 2 \frac{h_0}{V_0} = 10 \text{ с}, \quad n = 9,81 + \frac{100^2}{2 \cdot 500} = 19,81 \text{ м/с}^2, \quad P = 40 \cdot 000 \cdot 19,81 = 792,4 \text{ кН},$$

$$|\dot{m}| = 792 \cdot 400 / 2500 = 316,96 \text{ кг/с}, \quad m_k = 40 \cdot 000 - 316,96 \cdot 10 = 36 \cdot 830,4 \text{ кг}.$$

Полный расход топлива: $\Delta m_k = 40 \cdot 000 - 36 \cdot 830,4 = 3169,6$ кг.

Пример 1.3: $m_0 = 40$ т, $h_0 = 500$ м, $V_0 = 110$ м/с.

$$t_k = 2 \frac{h_0}{V_0} = 2 \frac{500}{110} = 9,091 \text{ с}, \quad n = 9,81 + \frac{110^2}{2 \cdot 500} = 21,91 \text{ м/с}^2,$$

$$P = 40 \cdot 000 \cdot 21,91 = 876,4 \text{ кН}, \quad |\dot{m}| = 792 \cdot 400/2500 = 350,56 \text{ кг/с},$$

$$m_k = 40 \cdot 000 - 350,56 \cdot 10 = 36 \cdot 494,4 \text{ кг}.$$

Полный расход топлива: $\Delta m_k = 40 \cdot 000 - 36 \cdot 494,4 = 3505,6$ кг.

Задание 1

1. Проинтегрировать аналитически дифференциальные уравнения (1.1), подтвердив правильность приведённых выражений (1.2) и (1.3).
2. Провести расчёты для заданных начальных условий и занести полученные результаты в табл. 1.

Таблица 1

Простейшая программа торможения

$m_0 = 40$ т	t_k	n	P	$ \dot{m} $	m_k	Δm_k
	с	м/с ²	кН	кг/с	т	т
$h_0 = 1$ км, $V_0 = 1000$ м/с	20	14,81	592,4	236,96	36,830	4,739
$h_0 =$ $V_0 =$						
$h_0 =$ $V_0 =$						

1.1. Оптимальное торможение

Оптимальное торможение n_{opt} начинается на высоте h_0 при такой скорости V_{0opt} , при которой расходуете минимальное количество топлива.

Учтём изменение массы МКА, записывая третье уравнения (1) в виде:

$$dm = -\frac{P}{W} dt. \quad (1.10)$$

С учётом (1.7) получаем:

$$dm = -\frac{m_0 n}{W} dt. \quad (1.11)$$

В уравнении (1.11) переменные разделены, интегрирование приводит к выражению для определения текущей массы:

$$m = m_0 \left(1 - \frac{n}{W} t \right). \quad (1.12)$$

В момент приземления конечная масса МКА равна:

$$m_k = m_0 \left(1 - \frac{n}{W} t_k \right). \quad (1.13)$$

Подстановка (1.5) и (1.6) в (1.13) даёт выражение для определения конечной массы (или полного расхода топлива) в зависимости от начальных условий:

$$m_k = m_0 \left[1 - \frac{1}{W} \left(2g \frac{h_0}{V_0} + V_0 \right) \right]. \quad (1.14)$$

Из (1.14) следует, что полный расход топлива тем меньше (конечная масса тем больше), чем меньше высота начала торможения h_0 . Но при этом, как следует из (1.5), (1.7), увеличивается требуемая величина тяги торможения. Исследуем величину m_k на экстремум, считая её функцией начальной скорости:

$$\frac{\partial m_k}{\partial V_0} = \frac{m_0}{W} \left(2g \frac{h_0}{V_0^2} - 1 \right) = 0, \quad (1.15)$$

откуда следует оптимальная величина скорости начала торможения, обеспечивающая полный минимальный расход топлива двигателей при торможении:

$$V_{0opt} = \sqrt{2gh_0}. \quad (1.16)$$

Максимальная конечная масса МКА (при минимальном расходе топлива на приземление) равна:

$$m_{k \max} = m_0 \left(1 - \frac{2}{W} \sqrt{2gh_0} \right) = m_0 \left(1 - \frac{2}{W} V_{0opt} \right). \quad (1.17)$$

В примере 1.2 вычисления дают:

$$V_{0opt} = \sqrt{2gh_0} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 500} = 99,045 \text{ м/с},$$

$$m_{k \max} = 40\,000 \left(1 - \frac{2}{2500} \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 500} \right) = 36\,830,5 \text{ кг}.$$

Минимальный запас топлива для торможения равен:

$$\Delta m_k = 40\,000 - 36\,830,5 = 3169,5 \text{ кг}.$$

Оптимальная величина реактивного ускорения при торможении равна:

$$n_{opt} = g + \frac{V_{0opt}^2}{2h_0} = g + g = 2g. \quad (1.18)$$

Продолжительность торможения определяется выражением:

$$t_{kopt} = 2 \frac{h_0}{V_{0opt}} = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}. \quad (1.19)$$

Для условий примера 1.2 получаем: $n_{opt} = 19,62 \text{ м/с}^2$, $t_{kopt} = 10,096 \text{ с}$. Хотя минимальная масса 3169,5 кг сожжённого при посадке топлива не намного отличается от величины, полученной в примере 1.2 (условия примера оказались близкими к оптимальным), различия в величинах тормозящего ускорения и времени достаточно заметны.

Задание 2

Рассчитать программу оптимального торможения и соответствующие проектные параметры. Результаты занести в табл. 2, и сравнить с результатами задания 1.

Таблица 2

Оптимальная программа торможения

$m_0 = 40 \text{ т}$	t_{kopt}	n_{opt}	P_{opt}	$ \dot{m} _{\min}$	$m_k \max$	$\Delta m_k \min$
	с	м/с ²	кН	кг/с	т	т
$h_0 = 500 \text{ м,}$ $V_{0opt} = 99,045 \text{ м/с}$	10,096	19,62	784,8	313,92	36,830	3,160
$h_0 =$ $V_0 =$						
$h_0 =$ $V_0 =$						

1.2. Модифицированная программа торможения

Учитывая переменность массы МКА при выгорании топлива, сформируем более точную, или модифицированную программу торможения.

Вместо (1.4) запишем более строгое выражение для величины силы тяги:

$$P = mn, \quad (1.20)$$

с учётом переменности массы МКА, $m = m(t)$. Тогда из третьего уравнения системы (1) имеем:

$$\frac{dm}{m} = -\frac{n}{W} dt. \quad (1.21)$$

Интегрирование даёт:

$$\ln \frac{m}{m_0} = -\frac{n}{W} t \quad \text{или} \quad m = m_0 \exp\left(-\frac{n}{W} t\right). \quad (1.22)$$

В конце торможения имеем:

$$m_k = m_0 e^{-\frac{n}{W} t_k}. \quad (1.23)$$

С учётом (1.5) и (1.6) получаем выражение для определения конечной массы МКА:

$$m_k = m_0 \exp\left\{-\frac{1}{W} \left(2g \frac{h_0}{V_0} + V_0\right)\right\}. \quad (1.24)$$

Исследование на экстремум m_k как функции от V_0 даёт:

$$V_{0opt} = \sqrt{2gh_0}, \quad (1.25)$$

что совпадает с результатом (1.16). После подстановки (1.25) в (1.24) имеем:

$$m_{k \max} = m_0 e^{-\frac{2}{W}\sqrt{2gh_0}} = m_0 e^{-\frac{2}{W}V_{opt}}. \quad (1.26)$$

В примере 1.2 получаем:

$$m_{k \max} = 40\,000 e^{-\frac{2}{2500}99,045} = 36\,952,9 \text{ кг.}$$

Более строгий расчёт даёт уменьшение полного расхода топлива на 122,4 кг по сравнению с результатом 36 830,5 кг, полученным по более простым формулам.

Задание 3

Расчитать проектные параметры с модифицированной модельной системой. Сравнить результаты с результатами задания 1 и задания 1.1. Результаты занести в табл. 3.

Таблица 3

Модифицированная программа торможения

$m_0 = 40 \text{ т}$	t_{kopt}	n_{opt}	P_{opt}	$ \dot{m} _{\min}$	$m_{k \max}$	$\Delta m_{k \min}$
	с	м/с ²	кН	кг/с	т	т
$h_0 = 500 \text{ м,}$ $V_{0opt} = 99,045 \text{ м/с}$	10,096	19,62	784,8	313,92	36,953	3,047
$h_0 = V_0 =$						
$h_0 = V_0 =$						

Уточнение программы торможения по методу Пикара

Решение (1.22) для текущей величины массы представляет приближение для нахождения более точного аналитического решения по методу Пикара. Поделив первое уравнение системы (1) при $\rho = 0$ на величину массы (1.22), получим:

$$\dot{V} = -ne\frac{n}{W}t + g, \quad (1.27)$$

где $n = P / m_0$.

Непосредственное интегрирование даёт выражение для текущей скорости приземления:

$$V(t) = V_0 + g(t - t_0) - W e^{\frac{n}{W}(t-t_0)} \Bigg|_{t_0}^t = V_0 + g(t - t_0) - W \left(e^{\frac{n}{W}(t-t_0)} - 1 \right). \quad (1.28)$$

В момент приземления, $t = t_k$, $V(t_k) = 0$, при $t_0 = 0$ имеем:

$$e^{\frac{n}{W}t_k} = 1 + \frac{V_0 + gt_k}{W}. \quad (1.29)$$

Подстановка (1.28) во второе уравнение (1.1) приводит к дифференциальному уравнению с разделёнными переменными:

$$dh = - \left[V_0 + g(t-t_0) - W \left(e^{\frac{n}{W}(t-t_0)} - 1 \right) \right] dt, \quad (1.30)$$

интегрирование которого даёт:

$$h(t) = h_0 - V_0(t-t_0) - \frac{g}{2}(t-t_0)^2 + \frac{W^2}{n} e^{\frac{n}{W}(t-t_0)} \Big|_{t_0}^t - W(t-t_0).$$

После подстановки пределов интегрирования получаем выражение для текущей высоты приземления:

$$h(t) = h_0 - V_0(t-t_0) - \frac{g}{2}(t-t_0)^2 + \frac{W^2}{n} \left(e^{\frac{n}{W}(t-t_0)} - 1 \right) - W(t-t_0). \quad (1.31)$$

В момент приземления $t = t_k$ имеем $h(t_k) = 0$, и при $t_0 = 0$ получаем:

$$h_0 - V_0 t_k - \frac{g}{2} t_k^2 + \frac{W^2}{n} \left(e^{\frac{n}{W} t_k} - 1 \right) - W t_k = 0. \quad (1.32)$$

Из (1.29) выразим ускорение:

$$n = \frac{W}{t_k} \ln \left(1 + \frac{V_0 + g t_k}{W} \right). \quad (1.33)$$

Подстановка (1.29) и (1.33) в (1.32) даёт нелинейное уравнение относительно t_k :

$$h_0 - (V_0 + W) t_k - \frac{g}{2} t_k^2 + \frac{V_0 + g t_k}{\ln \left(1 + \frac{V_0 + g t_k}{W} \right)} t_k = 0. \quad (1.34)$$

Считая величину $(V_0 + g t_k)/W$ в выражении (1.34) достаточно малой, представим логарифмическую функцию рядом Маклорена с одним членом разложения:

$$\ln \left(1 + \frac{V_0 + g t_k}{W} \right) \approx \frac{V_0 + g t_k}{W}. \quad (1.35)$$

Подставляя (1.35) в (1.34), получаем квадратное уравнение:

$$\frac{g}{2} t_k^2 + V_0 t_k - h_0 = 0 \quad (1.36)$$

для определения продолжительности торможения, которая оказалась равной длительности свободного падения. Это не соответствует физическому смыслу и говорит о том, что в разложении (1.35) необходимо использовать больше членов или приближённо решать уравнение (1.34).

1.3. Программа комфортного торможения

Комфортным считается приземление, при котором касание поверхности происходит не только с нулевой скоростью, но и с нулевым ускорением. Один из возможных законов регулирования тормозящего ускорения для выполнения комфортного приземления является линейное уменьшение реактивного ускорения от некоторой начальной до нулевой величины, достигаемой в конечный момент:

$$n = g - a_0(t - t_k), \quad (1.37)$$

где a_0 – коэффициент линейности, t_k – продолжительность торможения. Подстановка (1.37) в первое уравнение (1) даёт:

$$\dot{V} = a_0(t - t_k). \quad (1.38)$$

Интегрируя (1.38), получаем выражение для скорости:

$$V = V_0 + a_0 t \left(\frac{t}{2} - t_k \right). \quad (1.39)$$

В конечный момент, $V(t_k) = 0$, получаем:

$$t_k = \sqrt{2 \frac{V_0}{a_0}}. \quad (1.40)$$

Интегрирование второго уравнения системы (1) с учётом (1.39) даёт выражение для высоты:

$$h = h_0 - V_0 t + \frac{a_0}{2} t_k t^2 - \frac{a_0}{6} t^3. \quad (1.41)$$

В конечный момент, $h(t_k) = 0$, из (1.41) определяем коэффициент:

$$a_0 = \frac{2 V_0^3}{9 h_0^2}, \quad (1.42)$$

а из (1.40) определяем продолжительность торможения:

$$t_k = 3 \frac{h_0}{V_0}. \quad (1.43)$$

Теперь программа комфортного торможения определена полностью:

$$n = g + \frac{2 V_0^2}{3 h_0} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{V_0}{h_0} t \right). \quad (1.44)$$

В начальный момент тормозящее ускорение равно:

$$n_0 = g + \frac{2 V_0^2}{3 h_0}. \quad (1.45)$$

Конечная масса в результате выгорания топлива определяется выражением:

$$m_k = m_0 e^{-\frac{V_0^2 + 3gh_0}{V_0 W}} \quad (1.46)$$

В примере 1.2 с начальными условиями $h_0 = 500$ м, $V_0 = 100$ м/с, получаем: $t_k = 15$ с, $a_0 = 0,8889$ м/с³, $m_k = 36\,234,8$ кг, и полный расход топлива равен $\Delta m_k = 3765,2$ кг. Стоимость комфортного приземления равна 595,7 кг топлива.

Задание 4

Рассчитать программу комфортного торможения и проектные параметры. Оптимизировать программу комфортного приземления по выбранным проектным параметрам. Результаты занести в табл. 4.

Таблица 4

Программа комфортного торможения

$m_0 = 40$ т	t_k	n_0	P_0	$ \dot{m} _0$	m_k	Δm_k
	с	м/с ²	кН	кг/с	т	т
$h_0 = 500$ м, $V_0 = 100$ м/с	15,0	13,333	533,3	213,33	36,235	3,765
$h_0 =$ $V_0 =$						
$h_0 =$ $V_0 =$						

Отметим, что оптимизацией управления можно добиться меньшего расхода топлива. Исследование на экстремум величины m_k как функции от начальной высоты h_0 даёт оптимальную высоту начала торможения

$$V_{0opt} = \sqrt{3gh_0} \quad (1.47)$$

Подстановка (1.47) в (1.46) определяет максимальную величину конечной массы

$$m_{k \max} = m_0 e^{-\frac{2}{W} \sqrt{3gh_0}} = m_0 e^{-\frac{2}{W} V_{0opt}} \quad (1.48)$$

или минимальную величину полного расхода топлива:

$$\Delta m_{k \min} = m_0 \left(1 - m_0 e^{-\frac{2}{W} V_{0opt}} \right) \quad (1.49)$$

В примере 1.2 получаем: $V_{0opt} = (3 \cdot 9,81 \cdot 500)^{1/2} = 121,305$ м/с, $m_{k \max} = 36\,300,6$ кг, $\Delta m_{k \min} = 3699,4$ кг. Это больше на 529,8 кг, чем с программой постоянного торможения, и это есть плата за комфортное приземление.

После начала свободного падения, $t = t_0$, $V(t_0) = V_0$, $h(t_0) = h_0$, оптимальная стратегия торможения состоит в том, чтобы дожидаться момента времени $t = t_1$, при котором выполняется условие $V_1 = \sqrt{3gh_1}$. При условии $V_0 < \sqrt{3gh_0}$ и $t_0 = 0$ такой момент наступит через промежуток времени:

$$t_1 = \frac{1}{g} \left[\sqrt{\frac{3}{5}(V_0^2 + 2gh_0)} - V_0 \right] = \frac{1}{g} (V_1 - V_0). \quad (1.50)$$

При этом на высоте

$$h_1 = \frac{1}{5} \left(2h_0 + \frac{V_0^2}{g} \right) \quad (1.51)$$

скорость равна:

$$V_1 = \sqrt{\frac{3}{5}(V_0^2 + 2gh_0)}. \quad (1.52)$$

В рассматриваемом примере 1.2 получаем:

$$V_1 = \sqrt{\frac{3}{5}(100^2 + 2 \cdot 9,81 \cdot 500)} = 109,023 \text{ м/с},$$

$$h_1 = \frac{1}{5} \left(2 \cdot 500 + \frac{100^2}{9,81} \right) = 403,9 \text{ м}, \quad t_1 = \frac{1}{9,81} (109,023 - 100) = 0,920 \text{ с}.$$

Скорость увеличилась на 9 м/с, а высота уменьшилась почти до 400 м.

Выводы по разделу 1

1. Что такое проектные параметры?
2. Что такое программа торможения?
3. Как изменение начальных условий в простейшей модельной системе воздействует на проектные параметры?
4. Как вариация одних проектных параметров в простейшей модельной системе влияет на изменение других проектных параметров?
5. Что такое оптимальное торможение и как оно отражается на проектных параметрах?
6. Что такое модифицированная программа торможения, чем она отличается от простейшей программы и как она отражается на проектных параметрах?
7. Что такое комфортная программа торможения, чем она отличается от программы постоянного торможения и как она влияет на проектные параметры?

2. Лунная модельная система

Лунная модельная система образуется из исходной (1) в отсутствии атмосферы, $\rho = 0$, но с учётом уменьшения массы в результате выгорания топлива в ракетном двигателе, $\dot{m} \neq 0$. Своё название модельная система получила благодаря практическому совпадению со строгой математической моделью прилунения:

$$\dot{V} = -n + g, \quad \dot{h} = -V, \quad \dot{m} = -P/W. \quad (2.1)$$

Подстановка третьего уравнения системы (2.1) в первое даёт:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\dot{m}}{m}W + g. \quad (2.2)$$

После умножения (2.2) на dt получаем:

$$dV = \frac{dm}{m}W + gdt. \quad (2.3)$$

Примем допущение о линейном расходе топлива:

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt} = -|\dot{m}| = \text{const}. \quad (2.4)$$

Интегрирование (2.4) даёт:

$$m(t) = m_0 - |\dot{m}|(t - t_0) = m_0[1 - \beta(t - t_0)], \quad (2.5)$$

где $\beta = |\dot{m}|/m_0$ – удельный массовый секундный расход топлива.

Интегрируя (2.3) с учётом (2.5), получаем:

$$V(t) = V_0 + W \ln \frac{m}{m_0} + g(t - t_0) = V_0 + W \ln[1 - \beta(t - t_0)] + g(t - t_0). \quad (2.6)$$

Интегрирование второго уравнения для высоты в системе (2.1) с учётом (2.6) даёт:

$$h(t) = h_0 - V_0(t - t_0) - \frac{g}{2}(t - t_0)^2 + \frac{W}{\beta} \{ [1 - \beta(t - t_0)] \ln[1 - \beta(t - t_0)] + \beta(t - t_0) \}. \quad (2.7)$$

Поскольку при $t = t_k$ необходимо иметь $V(t_k) = V_k = 0$, $h(t_k) = h_k = 0$, то, считая $t_0 = 0$, получаем систему из двух алгебраических нелинейных уравнений:

$$\begin{aligned} V_0 + W \ln(1 - \beta t_k) + g t_k &= 0, \\ h_0 - V_0 t_k - \frac{g}{2} t_k^2 + \frac{W}{\beta} \{ [1 - \beta t_k] \ln[1 - \beta t_k] + \beta t_k \} &= 0, \end{aligned} \quad (2.8)$$

для определения двух неизвестных t_k и β .

Из первого соотношения последовательно записываем:

$$\ln(1 - \beta t_k) = -\frac{V_0 + gt_k}{W}, \quad 1 - \beta t_k = e^{-\frac{V_0 + gt_k}{W}}, \quad \beta t_k = 1 - e^{-\frac{V_0 + gt_k}{W}} \quad (2.9)$$

и выражаем β через t_k :

$$\beta = \frac{1}{t_k} \left[1 - \exp\left(-\frac{V_0 + gt_k}{W}\right) \right]. \quad (2.10)$$

Подстановка выражений (2.9) и (2.10) во второе уравнение системы (2.8) и несложные преобразования дают нелинейное квадратное уравнение для определения продолжительности торможения:

$$t_k^2 + \frac{2}{g} \left\{ V_0 t_k - h_0 - t_k \left[\frac{V_0 + gt_k}{1 - \exp\left(\frac{V_0 + gt_k}{W}\right)} + W \right] \right\} = 0. \quad (2.11)$$

После определения продолжительности торможения выражение для тормозящего ускорения принимает вид:

$$n = \frac{W}{t_k} \left(1 - e^{-\frac{V_0 + gt_k}{W}} \right). \quad (2.12)$$

Отметим, что без последнего слагаемого выражение (2.11) представляет квадратное уравнение для определения времени свободного падения тела постоянной массы при отсутствии атмосферы, решение которого имеет вид

$$t_k = \frac{1}{g} \left[\sqrt{V_0^2 + 2gh_0} - V_0 \right]. \quad (2.13)$$

В рассматриваемом примере 1.1 это время равно $t_k = 7,350$ с.

Уравнение (2.11) решается методом деления пополам, причём решение не может быть меньше значения, полученного по формуле (2.13), и больше значения $t_k = 2h_0 / V_0$ (1.3), которое получается в простейшей задаче торможения без учёта атмосферы и переменности массы.

Для примера 1.1 время приземления из решения (2.13) составляет $t_k = 18,5$ с.

Удельный массовый секундный расход топлива равен:

$$\beta = \frac{1}{t_k} \left(1 - e^{-\frac{V_0 + gt_k}{W}} \right) = \frac{1}{18,5} \left(1 - e^{-\frac{100 + 9,81 \cdot 18,5}{2500}} \right) = 0,005756 \text{ 1/с.}$$

Вычислим массовый секундный расход топлива:

$$|\dot{m}| = m_0 \beta = 40\,000 \cdot 0,005756 = 230,24 \text{ кг/с.}$$

Определим конечную массу в результате выгорания топлива:

$$m(t_k) = m_0 - |\dot{m}| t_k = m_0 (1 - \beta t_k) = 40\,000 (1 - 0,005756 \cdot 18,5) = 35\,740,56 \text{ кг.}$$

Для приземления требуется сжечь массу топлива:

$$\Delta m_k = m_0 - m_k = 40\,000 - 35\,740,56 = 4259,44 \text{ кг,}$$

что составляет 10,6 % от начальной массы МКА.

Определим силу тяги реактивного двигателя:

$$P = 230,24 \cdot 2500 = 575,6 \text{ кН.}$$

После чего получаем тормозящее ускорение:

$$n = P / m_0 = \beta W = 575\,600 / 40\,000 = 14,39 \text{ м/с}^2.$$

По сравнению с простейшей программой постоянного торможения лунное программное торможение с учётом изменения массы имеет преимущество по всем показателям: требуемая тяговооружённость P / m_0 уменьшилась в 1,029 раза, полный расход топлива для торможения уменьшился на 1,2 % ($11,8 - 10,6 = 1,2$ %). В абсолютном выражении экономия топлива составляет 479,76 кг.

Поскольку полученное время приземления t_k меньше времени приземления $t_k = 2h_0 / V_0$ в предыдущей задаче, то последнее выражение следует использовать в качестве верхней оценки при выборе первого приближения к решению времени торможения.

Примечание: несмотря на своё название, программа лунного торможения используется в алгоритмах торможения для приземления на поверхность Земли. В этом случае неучтённость сопротивления атмосферы выразится либо в погрешности приземления, либо в ухудшении проектных параметров.

Задание 5

Расчитать программу лунного торможения и проектные параметры и занести результаты в табл. 5.

Таблица 5

Лунная программа торможения.

$m_0 = 40 \text{ т}$	t_k	n	P	$ \dot{m} $	m_k	Δm_k
	с	м/с ²	кН	кг/с	т	т
$h_0 = 1000 \text{ м, } V_0 = 100 \text{ м/с}$	18,5	14,39	575,6	230,24	35,741	4,259
$h_0 = \quad V_0 = \quad$						
$h_0 = \quad V_0 = \quad$						

Выводы по разделу 2

1. Как изменение начальных условий в лунной программе торможения воздействует на проектные параметры (программу торможения, полный расход топлива и др.)?

2. Как вариация одних проектных параметров в лунной модельной системе влияет на изменение других проектных параметров?

3. Как уменьшение массы МКА в результате выгорания топлива влияет на программу торможения и проектные параметры?

3. Модельная система приземления МКА в атмосфере

Рассмотрим построение программы торможения в модельной системе, в которой учитывается однородная атмосфера, $\rho = \text{const}$, при неизменной массе МКА, $m = \text{const}$. Первое уравнение системы (1) принимает вид:

$$\frac{dV}{dt} = -\sigma \rho V^2 - n + g, \quad (3.1)$$

где $\sigma = C_x S / (2m)$ – баллистический параметр.

Полагая $n = \text{const}$, после разделения переменных в уравнении (3.1) приходим к уравнению:

$$\frac{dV}{V^2 + (n-g)/(\sigma\rho)} = -\sigma\rho dt, \quad (3.2)$$

интегрирование которого в пределах от параметров начального состояния до соответствующих текущих параметров в предположении, что $n > g$, даёт решение для скорости вертикального приземления:

$$V(t) = \sqrt{\frac{n-g}{\sigma\rho}} \operatorname{tg} \left[\operatorname{arctg} \left(V_0 \sqrt{\frac{\sigma\rho}{n-g}} \right) - \sqrt{\sigma\rho(n-g)}(t-t_0) \right]. \quad (3.3)$$

Подстановка (3.3) во второе уравнение системы (1) и последующее интегрирование даёт решение для текущей высоты вертикального приземления:

$$h(t) = h_0 - \frac{1}{\sigma\rho} \ln \left| \frac{\cos \left[\sqrt{\sigma\rho(n-g)}(t-t_0) - \operatorname{arctg} \left(V_0 \sqrt{\sigma\rho/(n-g)} \right) \right]}{\cos \operatorname{arctg} \left(V_0 \sqrt{\sigma\rho/(n-g)} \right)} \right|. \quad (3.4)$$

С учётом (3.3) получаем:

$$h(V) = h_0 - \frac{1}{\sigma\rho} \ln \left| \frac{\cos \operatorname{arctg} \left(V \sqrt{\sigma\rho/(n-g)} \right)}{\cos \operatorname{arctg} \left(V_0 \sqrt{\sigma\rho/(n-g)} \right)} \right|. \quad (3.5)$$

Решение задачи программного торможения состоит в одновременном получении следующих параметров поступательного движения:

$$t = t_k, \quad V(t_k) = V_k = 0, \quad h(t_k) = h_k = 0. \quad (3.6)$$

Тогда из (3.4) с учётом (3.3) и (3.5) следует:

$$h_0 = -\frac{1}{\sigma\rho} \ln \left| \cos \operatorname{arctg} \left(V_0 \sqrt{\frac{\sigma\rho}{n-g}} \right) \right|, \quad (3.7)$$

откуда получаем величину реактивного ускорения, необходимую для торможения вертикальной скорости при мягком приземлении МКА:

$$n = g + \sigma\rho \left(\frac{V_0}{\operatorname{tg} \operatorname{arccos} e^{-h_0\sigma\rho}} \right)^2. \quad (3.8)$$

Выражение (3.8) определяет программу торможения за счёт силы тяги ракетного двигателя

$$P = nm = \text{const}, \quad \forall t \in [t_0, t_k], \quad (3.9)$$

где полная продолжительность торможения следует из (3.3)

$$t_k = t_0 + \frac{1}{\sqrt{\sigma\rho(n-g)}} \arctg\left(V_0 \sqrt{\frac{\sigma\rho}{n-g}}\right). \quad (3.10)$$

В рассматриваемом примере 1.1 примем $C_x = 5$ и $S = 14 \text{ м}^2$, тогда имеем:

$$\sigma = \frac{C_x S}{2m} = \frac{5 \cdot 14}{2 \cdot 40000} = 0,875 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2/\text{кг}.$$

Плотность атмосферы примем равной соответствующему значению на уровне моря, $\rho_k = 1,225 \text{ кг/м}^3$. Тогда $\sigma\rho = 0,001072 \text{ 1/м}$. Из (3.8) получаем:

$$n = 9,81 + 0,001072 \left(\frac{100}{\text{tg arccos } e^{-1000 \cdot 0,001072}} \right)^2 = 11,233 \text{ м/с}^2.$$

Сила тяги равна $P = 449,335 \text{ кН}$. Из (3.10) получаем продолжительность процесса приземления:

$$t_k = \frac{1}{\sqrt{0,001072(11,233 - 9,81)}} \arctg\left(100 \sqrt{\frac{0,001072}{1,423}}\right) = 31,272 \text{ с}.$$

Массовый секундный расход равен: $|\dot{m}| = P/W = 449\,335/2500 = 179,734 \text{ кг/с}$.

Вычислим полный расход топлива:

$$|\dot{m}|t_k = 179,734 \cdot 31,272 = 5620,642 \text{ кг}.$$

По сравнению с лунной программой торможения в примере 1.1 тормозящее ускорение уменьшилось с $14,39 \text{ м/с}^2$ до $11,232 \text{ м/с}^2$ и сила тяги снизилась с $575,6 \text{ кН}$ до $449,335 \text{ кН}$. Однако из-за увеличения продолжительности приземления с $18,5$ с до $31,272$ с полный расход топлива возрос с $4259,44 \text{ кг}$ до $5620,642 \text{ кг}$. Если же в данном примере принять такую же силу тяги торможения $575,6 \text{ кН}$, то это позволит уменьшить высоту начала торможения до

$$h_0 = -\frac{1}{0,001072} \ln \left| \cos \arctg\left(100 \sqrt{\frac{0,001072}{14,39 - 9,81}}\right) \right| = 562,6 \text{ м}.$$

К этой высоте скорость свободного падения уменьшится до величины:

$$V_0 = \sqrt{\frac{g_k}{\sigma\rho_k} \frac{R}{R+h}} e^{\frac{h_0}{2h_e}} = \sqrt{\frac{9,81}{0,001072}} \cdot 1 \cdot e^{\frac{562,6}{2 \cdot 10300}} = 98,340 \text{ м/с},$$

и тормозящее ускорение составляет:

$$n = 9,81 + 0,001072 \left(\frac{98,340}{\text{tg arccos } e^{-562,6 \cdot 0,001072}} \right)^2 = 14,239 \text{ м/с}^2.$$

Видим, что это значение тормозящего ускорения практически совпадает с тем значением, которое использовано при вычислении высоты начала торможения (14,39 м/с²). Продолжительность торможения сокращается до величины:

$$t_k = \frac{1}{\sqrt{0,001072 \cdot 4,429}} \operatorname{arctg} \left(98,340 \sqrt{\frac{0,001072}{4,429}} \right) = 14,395 \text{ с.}$$

Определим силу тяги торможения $P = nm = 14,395 \cdot 40\,000 = 575,799$ кН. При массовом секундном расходе, $|\dot{m}| = P/W = 575\,799/2500 = 230,320$ кг/с, полный расход топлива составляет $|\dot{m}|t_k = 230,320 \cdot 14,395 = 3315,4$ кг. В результате получаем заметную экономию топлива для данной программы торможения при одинаковой начальной силе тяги торможения.

Задание 6

Рассчитать программу торможения и проектные параметры с учётом сопротивления атмосферы и занести результаты в табл. 6.

Таблица 6

Атмосферная программа торможения

$W = 2500$ м/с $\sigma = 0,875 \cdot 10^{-3}$ м ² /кг $m_0 = 40$ т	t_k , с	n м/с ²	P , кН	$ \dot{m} $, кг/с	m_k , т	Δm_k , т
$h_0 = 1000$ м, $V_0 = 100$ м/с	31,272	11,233	449,3	179,7	34,379	5,621
$h_0 =$ $V_0 =$						
$h_0 =$ $V_0 =$						

Выводы по разделу 3

1. Как изменение начальных условий в модельной системе 3 воздействует на проектные параметры (программу торможения, полный расход топлива и др.)?
2. Как вариация одних проектных параметров в модельной системе 3 влияет на изменение других проектных параметров?
3. Какое влияние на программу торможения и проектные параметры оказывает сопротивление атмосферы?

Заключение

1. На основе аналитического решения дифференциальных уравнений трёх модельных систем, образованных различными упрощениями исходной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, получены три программных закона регулирования силы тяги ракетного двигателя, с помощью которой тормозится скорость падения и обеспечивается мягкое приземление многоэтажного космического аппарата (МКА).

2. Каждый из полученных законов регулирования силы тяги представляет основу бортового алгоритма управления, обеспечивающего мягкое приземление МКА при непрерывном воздействии внешних и параметрических неопределённых возмущений. Различия в применении алгоритмов торможения состоят в разных значениях характеристик МКА и его ракетных двигателей, называемых проектными параметрами, которые определяют облик проектируемого изделия.

3. Аналитические решения модельных систем дифференциальных уравнений позволяют выявить закономерности в динамике и управлении мягким приземлением МКА и наметить пути оптимизации и рационализации проектирования МКА за счёт совершенствования программных законов управления тормозящей силой тяги ракетного двигателя.

4. Полученные аналитические решения для кинематических параметров движения представляют основу для решения более точных дифференциальных уравнений модельных систем по методу Пикара.

Определения, сокращения и термины

1. МКА – многоразовый космический аппарат, предназначенный для вывода полезной нагрузки на околоземную орбиту и возвращения грузов на Землю.
2. РД – ракетный двигатель, предназначенный для разгона МКА при выходе на орбиту и торможения при посадке на поверхность Земли или Луны.
3. Закон управления – изменение тормозящей силы тяги РД в функции времени при посадке.
4. Алгоритм управления – последовательность физических действий и вычислительных операций при формировании текущей величины силы тяги РД. Он включает измерение параметров движения и характеристик РД, необходимых для вычислений в бортовом компьютере.
5. Исходные данные – это заданные для выполнения работы основные характеристики и параметры МКА и РД, Начальные условия – начальные значения параметров движения МКА и характеристик РД, используемые при интегрировании дифференциальных уравнений.
6. Математическая модель – совокупность дифференциальных уравнений, описывающих динамику полёта МКА, работу РД или всей системы в целом.
7. Проектные параметры – это основные характеристики и параметры МКА и РД, определяющие облик проектируемого изделия.
8. Программное управление – см. закон управления.

Библиографический список

1. Разработка и исследование алгоритмов управления вертикальным приземлением посадочных модулей / В.А. Афанасьев, Г.Л. Дегтярёв, А.С. Мещанов, Т.К. Сиразетдинов // Вестник Казанского государственного технического университета им. А.Н. Туполева. – 2007. – №3. – С. 56–59.
2. Таблицы неопределённых интегралов: справочник / Ю.А. Брычков, О.И. Марычев, А.П. Прудников. – М.: Наука, 1986. – 192 с.

Оглавление

<i>Предисловие</i>	3
<i>Введение</i>	4
<i>Математическая модель и управление торможением МКА</i>	4
1. <i>Простейшая модельная система</i>	6
1.1. <i>Оптимальное торможение</i>	8
1.2. <i>Модифицированная программа торможения</i>	10
1.3. <i>Программа комфортного торможения</i>	13
2. <i>Лунная модельная система</i>	16
3. <i>Модельная система приземления МКА в атмосфере</i>	19
<i>Заключение</i>	22
<i>Определения, сокращения и термины</i>	23
<i>Библиографический список</i>	23

Техн. редактор А.В. Миних

Издательский центр Южно-Уральского государственного университета

Подписано в печать 01.04.2009. Формат 60×84 1/16. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 1,39. Тираж 100 экз. Заказ 169/178. Цена С.

Отпечатано в типографии Издательского центра ЮУрГУ.
454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76.