Министерство образования и науки Российской федерации
Федеральное агентство по образованию
Южно-Уральский государственный университет
Филиал в г. Миассе
Кафедра «Гидравлика и теплотехника»

621.311.22

В.Г. Зезин

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ ГИДРОДИНАМИКИ

Учебное пособие

Челябинск
Издательство ЮУрГУ
2011

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Модели нестационарного движения жидкости 3
1.1. Классификация моделей нестационарного течения 3
1.2. Скорость распространения волн 5
1.3. Дифференциальные уравнения нестационарного движения жидкости в трубопроводе 9
1.4. Волновые уравнения для потока жидкости в длинных трубопроводах 12
2. Медленно изменяющиеся течения 18
2.1. Общие свойства и уравнения движения 18
2.2. Примеры медленно изменяющихся течений 19
2.2.1. Разгон потока жидкости 19
2.2.2. Выравнивание уровней жидкости в сообщающихся сосудах 21
2.2.3. Предельная частота движений поршня насоса 23
3. Волновые процесы в гидросистеме 26
3.1. Описание волн 26
3.2. Взаимодействие волн с различными элементами гидросистемы 30
3.2.1. Отражение волны от упругого элемента гидросистемы 30
3.2.2. Прохождение волны через дроссель 35
3.2.3. Прохождение волны через стык трубопроводов различного диаметра 39
3.3. Стоячие волны 41
3.4. Гидравлический удар 43
3.5. Характеристики элементов гидросистем 47
3.5.1. Характеристики источников питания 47
3.5.2. Характеристики гидродвигателей 49
3.5.3. Характеристики регулирующей и распределительной аппаратуры 53
3.5.4. Общие замечания по характеристикам элементов гидросистемы ... 56
4. Анализ волновых процессов в гидросистеме методом характеристик 58
4.1. Общие положения 58
4.2. Фазовые характеристики волн 59
4.3. Пример расчета переходного процесса в объемном гидроприводе методом характеристик 61
4.4. Общий алгоритм расчета переходного волнового процесса в гидросистеме методом характеристик 71
5. Библиографический список 74

1. МОДЕЛИ НЕСТАЦИОНАРНОГО ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

1.1. Классификация моделей нестационарного течения

Нестационарные течения – это течения, при которых параметры потока изменяются по времени. Эти изменения могут происходить медленно, например, при перетекании жидкости из одного резервуара в другой, а могут и быстро, например, при резком перекрытии трубопровода. В первом случае течение называется *медленно изменяющимся*, во втором – *быстро изменяющимся.*

Перестройка потока вызывается изменением режима работы гидросистемы за счет внешнего воздействия, либо наличием в самой системе элемента, работающего в циклическом режиме, например, пульсатора (насоса, гидромотора и пр.). И в том и другом случае изменения в параметры потока первоначально вносятся в месте установки элемента, работающего в переменном режиме. Передача этого возмущения всей остальной жидкости осуществляется волнами сжатия и расширения рабочей среды. Это быстро изменяющиеся течения.

Характеристики волн расширения и сжатия зависят от ее упругости, поэтому при анализе волновых процессов пренебрегать сжимаемостью недопустимо. Рассмотрим пример. Пусть имеются два резервуара, соединенные трубопроводом с запорным клапаном, рис. 1.1.

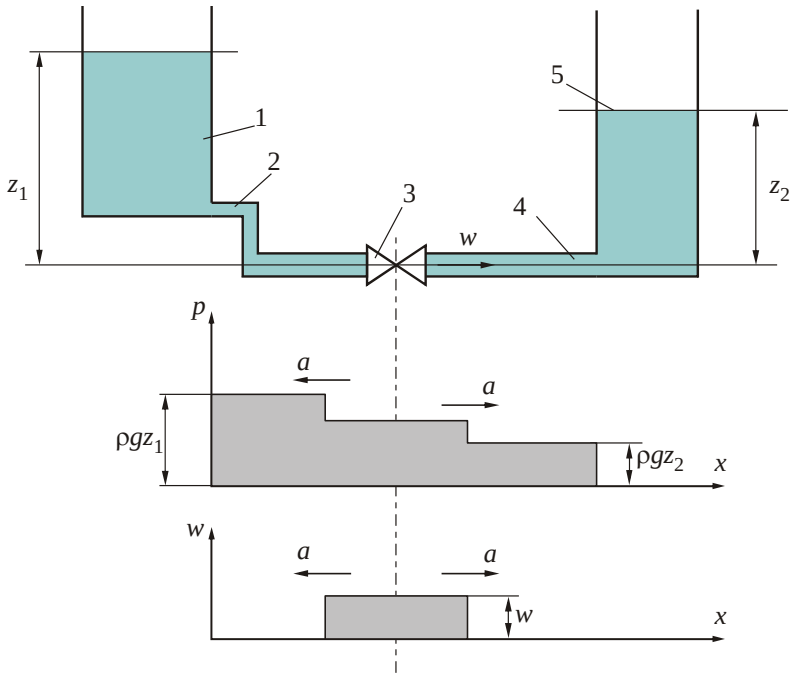


Рис. 1.1. Пример нестационарного течения

Пусть первоначально клапан перекрыт, скорость течения в трубопроводе равна нулю, а давления определяются высотой уровней жидкости в резервуарах: в левом трубопроводе $p_2 = \rho g z_1$; в правом $p_4 = \rho g z_2$. Поскольку уровень в левом резервуаре выше, то жидкость в левом трубопроводе испытывает большее сжатие чем в правом, то есть $p_2 > p_4$.

При резком (мгновенном) открытии клапана произойдет расширение более сжатой жидкости, примыкающей к клапану слева и ее переток из левого трубопровода в правый, что будет сопровождаться выравниванием давлений: падением давления в левом трубопроводе и повышением в близлежащих к клапану слоях жидкости в правом трубопроводе. Затем этот процесс будет распространяться на более отдаленные от клапана слои жидкости.

Следовательно, открытие клапана приведет к образованию двух волн, распространяющихся от него в противоположные стороны. Одна волна распространяется по трубопроводу 2 влево и несет с собой понижение давления и увеличение скорости (волна расширения), другая (волна сжатия) распространяется по трубопроводу 4 вправо и приводит к повышению давления и скорости, см. рис. 1.1.

Обе волны, достигнув резервуаров, отразятся от них. Появятся новые (отраженные) волны, которые направятся в сторону клапана и будут нести с собой определенные изменения давления и скорости. Встреча этих волн с клапаном приведет к образованию новых волн и т. д. В гидросистеме возникнет волновой процесс, который постепенно затухая, приведет ее к новому стационарному состоянию.

В сущности, все нестационарные течения представляют собой волновые процессы, ибо только волны передают всему потоку возмущения, вносимые в каком либо месте гидросистемы.

Параметром, характеризующим степень нестационарности течения, является локальное ускорение потока

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{\partial u_x}{\partial t}\mathbf{i} + \frac{\partial u_y}{\partial t}\mathbf{j} + \frac{\partial u_z}{\partial t}\mathbf{k}.$$

Локальные ускорения особенно велики у быстро изменяющихся течений, связанные с ними силы способны вызвать сильные волны расширения и сжатия.

У *медленно изменяющихся потоков* локальные ускорения и интенсивность волн существенно меньше. Поэтому для моделирования таких течений применяют упрощенные математические модели (модели несжимаемой жидкости), исключающие волновой процесс. То есть в таких моделях предполагается, что любое внешнее возмущение передается сразу всей жидкости потока, а не постепенно, слой за слоем, как происходит в действительности.

Как известно из теории подобия, соотношение локальных и конвективных ускорений определяется числом Струхаля

$$\mathrm{Sh} = \frac{L}{ut},$$

где L, u, t – характерные размер области течения, скорость потока и время процесса соответственно.

Число Струхаля растет при увеличении относительной величины локального ускорения потока. Поэтому быстро изменяющимся течениям соответствуют большие числа Струхаля, а медленно изменяющимся – малые.

1.2. Скорость распространения волн

Скорость распространения волн сжатия и расширения жидкости в трубах определяется упругими свойствами жидкости и стенок трубопровода. При этом большое значение имеет воздух или газ, содержащийся в жидкости в нерастворенном виде, даже в небольшом количестве.

Рассмотрим участок трубопровода, заполненный жидкостью, ограниченный с одной стороны поршнем, рис. 1.2. Пусть жидкость содержит нерастворенный в ней газ с объемной долей β.

$$\beta = \frac{W_г}{W_г + W_ж}, \tag{1.1}$$

где $W_г$, $W_ж$ – объем газа и жидкости соответственно в рассматриваемом участке трубопровода.

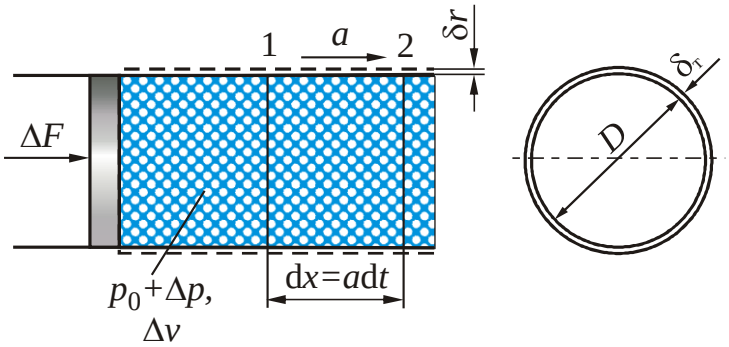


Рис. 1.2. К определению скорости волны

Плотность смеси жидкости и газа определится через плотности составляющих следующим образом

$$\rho_{см} = \frac{\rho_г W_г + \rho_ж W_ж}{W_г + W_ж} = \beta\rho_г + (1-\beta)\rho_ж. \tag{1.2}$$

Пусть в начальный момент времени поршень находится в покое, то есть скорость жидкости равна нулю $v = 0$. Приложим к поршню силу ΔF, под действием которой поршень переместится и приведет в движение слои жидкости, располагающиеся вблизи него. Скорость жидкости в этих слоях возрастет на величину Δv, а давление на Δp и данные возмущения распространяются от слоя к слою со скоростью a. За интервал времени $\mathrm{d}t$ волна возмущений распространится на величину $\mathrm{d}x = a \cdot \mathrm{d}t$, например, от сечения 1 до сечения 2, что приведет к изменению количества движения жидкости, заключенной между этими сечениями. В соответствии с законом сохранения количества движения можем записать

$$\rho_{см} S\,\mathrm{d}x \Delta v = \Delta p S\,\mathrm{d}t - \mathrm{d}F_{тр}\,\mathrm{d}t. \tag{1.3}$$

Если пренебречь импульсом сил трения $\mathrm{d}F_{тр}\,\mathrm{d}t$ по сравнению с импульсом сил давления $\Delta p S\,\mathrm{d}t$ и учесть, что $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = a$, то получим следующее уравнение, связывающее приращение давления и скорости жидкости в волне

$$\Delta p = \rho_{см} a \Delta v. \tag{1.4}$$

Считая границы сечений 1 и 2 неподвижными, запишем закон сохранения массы для объема жидкости, заключенной между ними при прохождении волны сжатия

$$\rho_{см} S \Delta v \, \mathrm{d}t = \left(\rho_{см} - \rho_{см0}\right) S \, \mathrm{d}x + \rho_{см} \pi D \delta r \, \mathrm{d}x. \tag{1.5}$$

Здесь $\rho_{см0}$ – плотность невозмущенной жидкости, содержащей нерастворенный газ; D – диаметр трубопровода; δr – приращение радиуса трубопровода за счет повышения давления на величину Δp. Первое слагаемое в правой части (1.5) представляет собой увеличение массы жидкости за счет изменения плотности, обусловленного сжатием, как газа, так и жидкости, а второе – за счет деформации стенок трубопровода. Разделим обе части (1.5) на $\rho_{см} S \mathrm{d}x$ и учтем, что $\mathrm{d}x / \mathrm{d}t = a$

$$\frac{\Delta v}{a} = \frac{\rho_{см} - \rho_{см0}}{\rho_{см}} + \frac{\pi D \delta r}{S} = \frac{\delta \rho_{см}}{\rho_{см}} + \frac{\pi D \delta r}{S}. \tag{1.6}$$

Преобразуем первый член правой части (1.6). Для этого рассмотрим некоторую массу жидкости $m = \rho_{см} W$, подвергающуюся сжатию давлением $\mathrm{d}p$. Так как при сжатии масса не изменяется, то $\rho_{см} W = \rho_{см0} W_0$. Из последнего соотношения следует

$$\frac{\mathrm{d}\rho_{см}}{\rho_{см0}} = -\frac{\mathrm{d}W}{W_0} \quad \text{или} \quad \frac{\mathrm{d}\rho_{см}}{\rho_{см}} = -\frac{\mathrm{d}W}{W}, \tag{1.7}$$

где $\rho_{см0}$, W_0 – начальное значение плотности и объема рассматриваемой массы жидкости.

Учитывая, что $\mathrm{d}W = \mathrm{d}W_г + \mathrm{d}W_ж$ и $W = W_г / \beta = W_ж / (1 - \beta)$ представим (1.7) в виде

$$\frac{\mathrm{d}\rho_{см}}{\rho_{см}} = -\left[\beta \frac{\mathrm{d}W_г}{W_г} + (1 - \beta) \frac{\mathrm{d}W_ж}{W_ж}\right]. \tag{1.8}$$

Процесс сжатия будем считать адиабатическим, тогда справедливо соотношение $p W_г^k = p_0 W_{г0}^k$, дифференцируя которое, получим

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = -k \frac{\mathrm{d}W_г}{W_г}. \tag{1.9}$$

Для капельной жидкости изменение объема при сжатии связано с изменением давления через модуль упругости (закон Гука для жидкости) $E_ж$:

$$\frac{\mathrm{d}W_ж}{W_ж} = -\frac{\mathrm{d}p}{E_ж}. \tag{1.10}$$

Подставляя (1.9) и (1.10) в (1.8), получим

$$\frac{\mathrm{d}\rho_{см}}{\rho_{см}} = \mathrm{d}p \left[\frac{\beta}{kp} + \frac{(1 - \beta)}{E_ж}\right]. \tag{1.11}$$

Ограничимся рассмотрением малых приращений давления в волне сжатия. Тогда первый член правой части уравнения (1.6) может быть представлен в форме (1.11).

Преобразуем теперь последний член (1.6). Так как $\delta r = \delta D / 2$, то

$$\frac{\pi D \delta r}{S} = 2\frac{\delta D}{D}. \qquad (1.12)$$

В соответствии с законом Гука

$$\frac{\delta D}{D} = \frac{\Delta\sigma}{E_т}, \qquad (1.13)$$

где $\Delta\sigma$ – приращение напряжений материала стенки трубопровода при повышении давления на Δp; $E_т$ – модуль упругости материала трубопровода.

$$\Delta\sigma = \frac{\Delta p D}{2\delta_т}, \qquad (1.14)$$

где $\delta_т$ – толщина стенки трубопровода.

Подставив (1.13) и (1.14) в (1.12), получим

$$\frac{\pi D \delta r}{S} = \frac{\Delta p D}{E_т \delta_т}. \qquad (1.15)$$

С учетом (1.4), (1.11) и (1.15) выражение (1.6) примет вид

$$\frac{1}{a^2} = \rho_{см}\left[\frac{1}{k}\frac{\beta}{p_0 + \Delta p} + \frac{1-\beta}{E_ж} + \frac{D}{E_т \delta_т}\right]. \qquad (1.16)$$

Соотношение (1.16) показывает, что скорость распространения волн в газонасыщенной жидкости зависит от величины приращения давления Δp. При этом скорость волн сжатия тем выше, а волн разрежения тем ниже, чем больше величина приращения Δp. Увеличение газосодержания (увеличение β) уменьшает скорость распространения волн.

Скорость распространения слабых волн $(\Delta p << p_0)$ принято называть скоростью звука и обозначать a_0. Из (1.16) следует, что

$$\frac{1}{a_0^2} = \rho_{см}\left[\frac{1}{k}\frac{\beta}{p_0} + \frac{1-\beta}{E_ж} + \frac{D}{E_т \delta_т}\right]. \qquad (1.17)$$

Выражение

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{k}\frac{\beta}{p_0} + \frac{1-\beta}{E_ж} + \frac{D}{E_т \delta_т}. \qquad (1.18)$$

Представляет собой приведенный модуль упругости слабо газонасыщенной жидкости в нежестком трубопроводе. Отсюда следует выражение

$$a_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho_{см}}}. \qquad (1.19)$$

Если жидкость не содержит газа $(\beta = 0)$, а стенки трубопровода жесткие $(E_т \to \infty)$, то $E = E_ж$ и скорость распространения слабых и умеренно сильных волн, несущих изменение давления $\Delta p << E_ж$

$$a \simeq a_0 = \sqrt{\frac{\mathrm{d}\,p}{\mathrm{d}\rho}} = \sqrt{\frac{E_ж}{\rho_ж}}. \qquad (1.20)$$

Например, для воды ($\rho = 10^3$ кг/м^3, $E_ж = 2{,}1\cdot10^9$ Па) $a_0 = 1450$ м/с, а для масла АМГ–10 ($\rho = 850$ кг/м^3, $E_ж = 1{,}35\cdot10^9$ Па) $a_0 = 1250$ м/с.

Упругие стенки трубопровода снижают скорость распространения волн. В этом случае

$$a_0 = \sqrt{\frac{E_ж}{\rho_ж}\frac{1}{1+\frac{E_ж}{E_т}\frac{D}{\delta_т}}}\,. \qquad (1.21)$$

Например, при относительной толщине трубопровода $\delta/D = 1/20$ в стальной трубе ($E_т = 2{,}1\cdot10^{11}$ Па) скорость волны в воде $a_0 = 1450/1{,}1 = 1320$ м/с, а в масле $a_0 = 1250/1{,}06 = 1190$ м/с.

Таким образом, скорость распространения ударных волн и звука в жидкости без нерастворенного газа имеют порядок 10^3 м/с.

Скорость звука в газе ($\beta = 1$, $\rho_{см} = \rho_0$) в жестком трубопроводе ($E_т \to \infty$) в соответствии с (1.16)

$$a_{0г} = \sqrt{\frac{kp_0}{\rho_0}} = \sqrt{kRT_0}\,. \qquad (1.22)$$

Например, для воздуха (k = 1,4, R = 287 Дж/кг·К) в диапазоне температур от минус 50 °С до 50 °С

$$a_{0г} = \sqrt{1{,}4\cdot287(223...323)} = 300...350 \text{ м/с}.$$

Интересно отметить, что при низком давлении скорость звука в газожидкостной смеси может быть существенно ниже, чем даже скорость звука в газе, что видно из рис. 1.3, где приведены результаты расчета по формуле (1.17) скорости звука в воде, содержащей воздух.

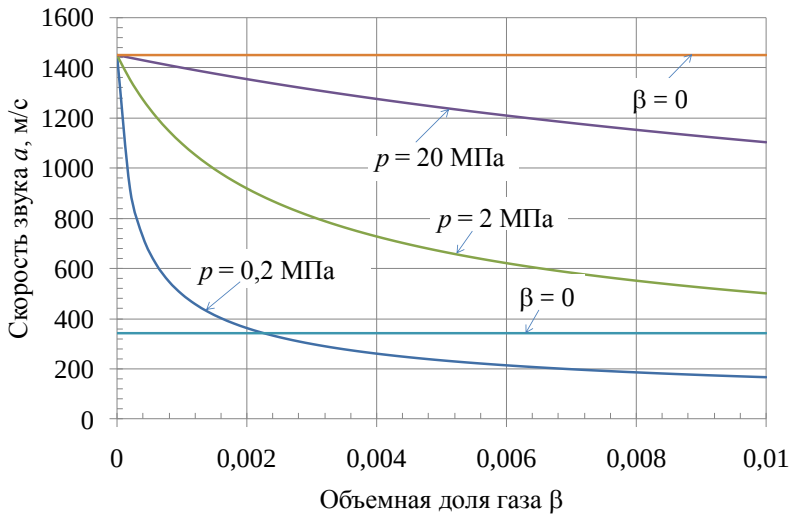


Рис. 1.3. Влияние давления и газосодержания на скорость звука

1.3. Дифференциальные уравнения нестационарного движения жидкости в трубопроводе

Система дифференциальных уравнений, описывающих нестационарное движение сжимаемой вязкой жидкости в трубопроводе, представляет собой уравнение Бернулли и уравнение неразрывности.

Уравнение Бернулли (уравнение движения). Как известно из курса МЖГ, общая форма уравнения Бернулли для произвольной трубки тока с элементом длины $\mathrm{d}\mathbf{l}$ имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l}+\mathrm{d}\left(gZ+\frac{u^2}{2}\right)+\frac{1}{\rho}\mathrm{d}\,p+\mathrm{d}e_{\mu}=0, \tag{1.23}$$

где Z – вертикальная координата рассматриваемой точки линии тока; $\mathbf{u}$ и u – вектор локальной скорости жидкости в данной точке и его абсолютная величина соответственно; ρ – плотность жидкости; e_{μ} – потери механической энергии потока на преодоление вязких сил сопротивления. Дифференциалы в (1.23) вычисляются по направлению линии тока $\mathrm{d}\mathbf{l}$.

Получим, используя (1.23), уравнение Бернулли для осредненных по поперечному сечению трубопровода параметров. Для этого проинтегрируем уравнение (1.23) по площади поперечного сечения.

$$\frac{1}{S}\int_S\left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l}+\mathrm{d}\left(gZ+\frac{u^2}{2}\right)+\frac{1}{\rho}\mathrm{d}\,p+\mathrm{d}e_{\mu}\right]\mathrm{d}S=0. \tag{1.24}$$

Рассматривать будем плавноизменяющиеся течения, для которых поперечные составляющие скорости, а также углы, образующиеся между соседними линиями тока, малы. Для таких течений давление p и плотность ρ можно считать постоянными в пределах рассматриваемого сечения трубопровода. Интегрирование будем выполнять в системе координат, связанной с осью трубопровода: ось x направлена по оси трубопровода, оси y и z ортогональны ей. Рассмотрим более подробно подынтегральную функцию. Так как векторы $\mathbf{u}$ и $\mathbf{l}$ коллинеарны, то

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l}=\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}l.$$

Дифференциалы вдоль линии тока представляют собой выражения вида

$$\mathrm{d}\left(gZ+\frac{u^2}{2}\right)=\frac{\partial}{\partial l}\left(gZ+\frac{u^2}{2}\right)\mathrm{d}l;\ \mathrm{d}\,p=\frac{\partial p}{\partial l}\mathrm{d}l;\ \mathrm{d}e_{\mu}=\frac{\partial e_{\mu}}{\partial l}\mathrm{d}l.$$

Подставив эти формулы в (1.24) и сокращая на $\mathrm{d}l$, получим

$$\frac{1}{S}\int_S\left[\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial l}\left(gZ+\frac{u^2}{2}\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial l}+\frac{\partial e_{\mu}}{\partial l}\right]\mathrm{d}S=0. \tag{1.25}$$

Производные по направлению $\mathbf{l}$ выражаются формулами типа

$$\frac{\partial}{\partial l}=\frac{\partial}{\partial x}\cos(\mathbf{l},\mathbf{i})+\frac{\partial}{\partial y}\cos(\mathbf{l},\mathbf{j})+\frac{\partial}{\partial z}\cos(\mathbf{l},\mathbf{k}).$$

Учитывая допущение о рассмотрении только плавноизменяющихся течений, направляющие косинусы между направлением **l** и осями y и z можно считать равными нулю. Тогда (1.25) примет вид

$$\frac{1}{S}\int_S\left[\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(gZ+\frac{u^2}{2}\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial e_\mu}{\partial x}\right]\mathrm{d}S=0. \qquad (1.26)$$

Выполним интегрирование в (1.26). Рассмотрим первое слагаемое

$$\frac{1}{S}\int_S\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}S=\frac{1}{S}\frac{\partial}{\partial t}\int_S u\,\mathrm{d}S=\frac{\partial w}{\partial t}, \qquad (1.27)$$

где w – средняя по поперечному сечению скорость потока $w=\frac{1}{S}\int_S u\,\mathrm{d}S$.

Второе слагаемое преобразуется следующим образом

$$\frac{1}{S}\int_S\frac{\partial gZ}{\partial x}\mathrm{d}S=g\frac{1}{S}\frac{\partial}{\partial x}\int_S Z\,\mathrm{d}S=g\frac{\partial Z_\text{ц}}{\partial x}, \qquad (1.28)$$

где $Z_\text{ц}$ – вертикальная координата центра масс рассматриваемого сечения $Z_\text{ц}=$ $=\frac{1}{S}\int_S Z\,\mathrm{d}S$.

Интегрирование третьего слагаемого дает

$$\frac{1}{S}\int_S\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right)\mathrm{d}S=\frac{1}{S}\frac{\partial}{\partial x}\int_S\left(\frac{u}{w}\right)^2\frac{w^2}{2}\mathrm{d}S=\frac{\partial\alpha w^2}{\partial x}, \qquad (1.29)$$

где α – коэффициент осреднения (коэффициент количества движения или коэффициент Буссинеска) имеющий следующий вид

$$\alpha=\frac{1}{S}\int_S\left(\frac{u}{w}\right)^2\mathrm{d}S. \qquad (1.30)$$

Так как давление и плотность постоянны по площади сечения, то четвертое слагаемое остается без изменений.

Потери удельной (отнесенной к единице массы движущегося потока) энергии e_μ представляют собой затраты энергии на преодоление сил трения. Исходя из этого, и соображений размерности можем записать

$$e_\mu=\frac{F_\text{тр}\,\mathrm{d}x}{m}=\frac{\tau P\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x}{\rho S\,\mathrm{d}x}=\frac{\tau P}{\rho S}\mathrm{d}x, \qquad (1.31)$$

где $F_\text{тр}$ – сила трения; m – масса жидкости в участке трубопровода длиной $\mathrm{d}x$; P – периметр трубопровода; τ – напряжения трения, действующие на стенках трубопровода.

Таким образом, после осреднения уравнение Бернулли для нестационарного движения сжимаемой жидкости в трубопроводе принимает вид

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(gZ_\text{ц}+\frac{\alpha w^2}{2}\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\tau P}{\rho S}=0. \qquad (1.32)$$

Уравнение (1.32) можно еще упростить, если учесть, что сжимаемость реальных жидкостей, характеризуемая модулем упругости $E = \rho \partial p / \partial \rho$, как правило, незначительна. По крайней мере, в большинстве случаев справедливо соотношение $E >> p$. Тогда имеем

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial\left(p/\rho\right)}{\partial x} + \frac{p}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial\left(p/\rho\right)}{\partial x} + \frac{p}{\rho^2}\frac{\partial p}{\partial p}\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial\left(p/\rho\right)}{\partial x} + \frac{p}{\rho E}\frac{\partial p}{\partial x} \simeq \frac{\partial\left(p/\rho\right)}{\partial x}.$$

С учетом последнего соотношения уравнение (1.32) принимает вид

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(gZ_{\text{ц}} + \frac{\alpha w^2}{2} + \frac{p}{\rho}\right) + \frac{\tau P}{\rho S} = 0. \qquad (1.33)$$

Или, переходя к напорам,

$$\frac{1}{g}\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(Z_{\text{ц}} + \frac{\alpha w^2}{2g} + \frac{p}{g\rho}\right) + \frac{\tau P}{g\rho S} = 0. \qquad (1.34)$$

Выражение в скобках представляет собой полный напор потока

$$H = Z_{\text{ц}} + \frac{\alpha w^2}{2g} + \frac{p}{g\rho}.$$

Уравнение неразрывности. Уравнение неразрывности для нестационарного движения сжимаемой жидкости в трубопроводе получим так же, как уравнение Бернулли, проинтегрировав общее уравнение неразрывности МЖГ

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho u_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho u_z}{\partial z} = 0 \qquad (1.35)$$

по площади поперечного сечения трубопровода *S*. Рассматривая плавноизменяющиеся течения, получим

$$\frac{1}{S}\int_S\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho u_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho u_z}{\partial z}\right)\mathrm{d}S = \frac{1}{S}\int_S\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_x\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)\mathrm{d}S =$$

$$= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{S}\int_S u_x\,\mathrm{d}S\right) + \frac{1}{S}\int_S u_x\,\mathrm{d}S\,\frac{\partial \rho}{\partial x}.$$

Таким образом, уравнение неразрывности для рассматриваемого случая течения имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial w}{\partial x} + w\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho w}{\partial x} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \qquad (1.36)$$

Учитывая, что $w = Q/S$, где Q – объемный расход, последнее уравнение можно представить и следующим образом

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{S}\frac{\partial Q}{\partial x} = 0. \qquad (1.37)$$

Получим еще одну форму уравнения неразрывности, необходимую для анализа волнового движения жидкости, используя определение модуля упругости жидкости *E*. Преобразуем следующим образом производную от плотности в последнем уравнении (1.36)

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{E}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{E}\left(\frac{\partial p}{\partial t}+w\frac{\partial p}{\partial x}\right) \tag{1.38}$$

С учетом (1.38) уравнение (1.36) запишется

$$\frac{\partial p}{\partial t}+w\frac{\partial p}{\partial x}+E\rho\frac{\partial w}{\partial x}=0.$$

Учитывая, что $E/\rho=a^2$, последнее уравнение примет вид

$$\frac{\partial p}{\partial t}+w\frac{\partial p}{\partial x}+\rho a^2\frac{\partial w}{\partial x}=0. \tag{1.39}$$

1.4. Волновые уравнения для потока жидкости в длинных трубопроводах

Волны сжатия и расширения, причиной появления которых при внесении возмущений в поток жидкости является сжимаемость среды, передают изменения параметров потока (скорости и давления) из одного узла гидросистемы в другой. Найдем закономерности распространения этих волн.

Идеальная жидкость. Рассмотрим течение идеальной сжимаемой жидкости в длинном горизонтальном трубопроводе с постоянной площадью поперечного сечения. Для идеальной жидкости $\tau = 0$. Уравнение Бернулли (1.34) для этого случая имеет вид

$$\frac{\partial w}{\partial t}+w\frac{\partial \alpha w}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=0. \tag{1.40}$$

Сравним порядки членов уравнения (1.40), содержащих конвективные производные. Считая, что течение происходит со скоростями существенно меньшими скорости распространения волн ($w << a$) и, используя (1.4), можем записать

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\rho a}{\rho}\frac{\partial w}{\partial x}=a\frac{\partial w}{\partial x},\ \text{то есть}\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}>>w\frac{\partial w}{\partial x}.$$

Аналогичные оценки выполним и для уравнения неразрывности (1.39)

$$w\rho a\frac{\partial w}{\partial x}<<\rho a^2\frac{\partial w}{\partial x}.$$

Тогда, с учетом полученных оценок, уравнение Бернулли (1.40) и уравнение неразрывности (1.39) для рассматриваемого случая течения примут вид

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=0, \tag{1.41}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\rho a^2\frac{\partial w}{\partial x}=0. \tag{1.42}$$

Найдем решение системы уравнений (1.41), (1.42). Для этого умножим первое из них на ρa и сложим со вторым:

$$\rho a\frac{\partial w}{\partial t}+a\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial t}+\rho a^2\frac{\partial w}{\partial x}=0. \tag{1.43}$$

Будем считать, что плотность жидкости и скорость волны изменяется незначительно. Это справедливо, при умеренных колебаниях давления и незначительной

объемной доли нерастворенного газа в рабочей жидкости. Тогда произведение ρa можно внести под знак производной.

$$\frac{\partial \rho a w}{\partial t} + a\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial t} + a\frac{\partial \rho a w}{\partial x} = 0. \tag{1.44}$$

После преобразований уравнение (1.44) принимает вид

$$\frac{\partial\left(p + \rho a w\right)}{\partial t} + a\frac{\partial\left(p + \rho a w\right)}{\partial x} = 0. \tag{1.45}$$

Вычтя умноженное на ρa уравнение (1.41) из уравнения (1.42) и повторив выполненные выше преобразования, получим

$$\frac{\partial\left(p - \rho a w\right)}{\partial t} - a\frac{\partial\left(p - \rho a w\right)}{\partial x} = 0. \tag{1.46}$$

Полученные уравнения (1.45) и (1.46) представляют собой систему линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с постоянными коэффициентами. Их общее решение выражается через произвольные, но дифференцируемые функции координаты и времени:

$$p + \rho a w = 2\sum F\left(t - \frac{x}{a}\right) + 2F_0; \tag{1.47}$$

$$p - \rho a w = 2\sum G\left(t + \frac{x}{a}\right) + 2G_0, \tag{1.48}$$

где F_0, G_0 – константы, которые определяются начальными параметрами потока (p_0, w_0):

$$2F_0 = p_0 + \rho a w_0; \tag{1.49}$$

$$2G_0 = p_0 - \rho a w_0. \tag{1.50}$$

Функции F и G (так называемые волновые функции) определяются внешними возмущениями, вносимыми в поток, а также взаимодействием потока с различными элементами гидросистемы. Если возмущений нет, то $F = G = 0$. Коэффициент 2, присутствующий в выражениях (1.47), (1.48) введен для упрощения вида конечного результата решения.

Убедиться, что (1.47) является решением уравнения (1.45), а (1.48) – уравнения (1.48) можно непосредственной подстановкой, что превращает исходные уравнения в тождества.

С учетом (1.49) и (1.50) решение системы (1.47), (1.48) принимает вид

$$\left(p - p_0\right) + \rho a\left(w - w_0\right) = 2\sum F\left(t - \frac{x}{a}\right); \tag{1.51}$$

$$\left(p - p_0\right) - \rho a\left(w - w_0\right) = 2\sum G\left(t + \frac{x}{a}\right). \tag{1.52}$$

Сложение и вычитание уравнений (1.51) и (1.52) приводит решение к виду, которое в явной форме выражает изменение давления и скорости течения идеальной сжимаемой жидкости через волновые функции:

$$\left.\begin{aligned} p - p_0 &= \sum F + \sum G; \\ w - w_0 &= \frac{\left(\sum F - \sum G\right)}{\rho a}. \end{aligned}\right\} \qquad (1.53)$$

Рассмотрим подробнее смысл волновых функций $F(t - x/a)$ и $G(t + x/a)$. Пусть состояние потока в сечении 1 с координатой x_1 в момент времени t_1 описывается функциями $F(t_1 - x_1/a)$ и $G(t_1 + x_1/a)$. Так как одинаковым значениям аргумента соответствуют одинаковые значения функций, то изменение состояния потока, наблюдающееся в сечении x_1 в момент времени t_1, повторится позже (при $t_2 > t_1$) в другом сечении 2 с координатой x_2, такой, что:

- для функции $F(t_1 - x_1/a)$ должно выполняться равенство $t_2 - \frac{x_2}{a} = t_1 - \frac{x_1}{a}$ и, следовательно $x_2 = x_1 + a(t_2 - t_1) > x_1$;
- для функции $G(t_1 + x_1/a)$ должно выполняться равенство $t_2 + \frac{x_2}{a} = t_1 + \frac{x_1}{a}$ и, следовательно $x_2 = x_1 - a(t_2 - t_1) < x_1$.

Следовательно, изменение состояния потока, описываемое функцией F будет повторяться с некоторым запозданием в сечении $x > x_1$, а возмущения, описываемые функцией G, с опозданием повторится в сечениях с $x < x_1$.

Таким образом, функция $F(t - x/a)$ описывает волны, бегущие вдоль оси x, а уравнение (1.51) – распространение этих волн в потоке жидкости и изменение параметров течения по пути следования этих волн.

Другая функция $G(t + x/a)$ и уравнение (1.52) описывает волны, бегущие против оси x (против потока) и их влияние на параметры течения.

В начальной стадии волнового процесса, когда присутствуют только две волны, распространяющиеся от источника возмущения, и нет волн отраженных от соседних узлов гидросистемы, изменение давления и скорости потока выражаются только через волновые функции F и G только этих двух волн:

$$\left.\begin{aligned} p - p_0 &= F + G; \\ w - w_0 &= \frac{F - G}{\rho a}. \end{aligned}\right\} \qquad (1.54)$$

Как видно из (1.53) для анализа волновых процессов можно использовать принцип суперпозиции, в соответствии с которым изменение давления и скорости в любой точке потока в любой момент времени определяется путем суммирования соответствующих изменений от каждой волны. Также путем суммирования изменений от каждой волны определяются и параметры течения.

Реальная жидкость. При описании динамики реальной жидкости в уравнении движения сохраняется член с напряжением трения τ, а само уравнение имеет вид

$$\frac{\partial w}{\partial t} + w\frac{\partial \alpha w}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\tau P}{\rho S} = 0. \qquad (1.55)$$

Это уравнение, совместно с уравнением неразрывности (1.39) образуют систему дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа. Она может быть решена методом характеристик. Характеристические уравнения бегущих волн для этой системы имеют вид:

- для характеристики $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=a$ или $\mathrm{d}\left(t-\frac{x}{a}\right)=0$, то есть в фазовой плоскости волны F, распространяющейся вдоль оси x, направленной по потоку

$$\mathrm{d}p+\rho a\,\mathrm{d}w+\frac{\tau P}{S}\mathrm{d}x=0; \tag{1.56}$$

- для характеристики $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-a$ или $\mathrm{d}\left(t+\frac{x}{a}\right)=0$, то есть в фазовой плоскости волны G, распространяющейся против оси x, направленной по потоку

$$\mathrm{d}p-\rho a\,\mathrm{d}w+\frac{\tau P}{S}\mathrm{d}x=0. \tag{1.57}$$

Перейдем в уравнениях (1.56), (1.57) от давления к напорам $H=p/(\rho g)$, а от скорости – к объемному расходу $Q=wS$ и введем безразмерные переменные:

- относительный напор $h=\frac{H}{H_\mu}$;
- относительный расход $q=\frac{Q}{Q_\mu}$;
- относительные касательные напряжения $\bar{\tau}=\frac{\tau Pl}{p_\mu S}=\frac{\tau Pl}{\rho a Q_\mu}$;
- относительную продольную координату $\bar{x}=\frac{x}{l_\mu}$;
- относительное время $\tau=\frac{l_\mu}{a}$.

При назначении масштабных величин p_μ, H_μ, Q_μ потребуем выполнения равенств $p_\mu=\rho g H_\mu$, $p_\mu=\rho a Q_\mu/S$. В качестве масштаба длины l_μ примем длину расчетного участка гидролинии (между соседними узлами) $l_\mu = l$.

В результате получим

$$\mathrm{d}h\pm\mathrm{d}q+\bar{\tau}\,\mathrm{d}\bar{x}=0, \tag{1.58}$$

Знак «плюс» в (1.58) относится к волне F, «минус» – к волне G.

Уравнения характеристических направлений в относительных переменных примут вид

$$\frac{\mathrm{d}\bar{x}}{\mathrm{d}\tau}\pm 1 \quad \text{или} \quad \mathrm{d}\bar{x}=\pm\mathrm{d}\tau. \tag{1.59}$$

Касательные напряжения τ выражаются через коэффициент трения λ:

$$\tau = \frac{\lambda}{8}\rho w|w| = \frac{\lambda}{8}\rho\left(\frac{Q_\mu}{S}\right)^2 q|q|,$$

тогда

$$\overline{\tau} = \frac{\lambda}{8}\rho w|w| = \frac{\lambda}{8}\rho\left(\frac{Q_\mu}{S}\right)^2 \frac{Pl}{\rho a Q_\mu} q|q| = cq,$$

где c – параметр сопротивления гидролинии

$$c = \frac{\lambda}{8}\rho\frac{Q_\mu}{S^2}\frac{Pl}{a}|q| = c_\mu|q|, \tag{1.60}$$

а для круглого трубопровода диаметром D

$$c = \frac{\lambda}{2}\rho\frac{Q_\mu}{S}\frac{l}{aD}|q|. \tag{1.61}$$

Средняя величина относительного касательного напряжения $\overline{\tau}_{\text{ср}}$ на расчетном участке трубопровода между двумя узлами гидролинии: начальным по ходу волны «н» и конечным «к» ($\overline{x}$ = 0…1) может быть приближенно определена по формуле

$$\begin{aligned}\left|\tau_{\text{ср}}\right| &= \left|\frac{c_{\text{н}}q_{\text{н}} + c_{\text{к}}q_{\text{к}}}{2}\right| = \frac{c_\mu q_{\text{н}}^2 + c_\mu q_{\text{к}}^2}{2} = c_\mu\frac{q_{\text{н}}^2 + \left(q_{\text{н}} + \Delta q_{\text{н}}\right)^2}{2} = \\ &= c_\mu q_{\text{н}}\left(q_{\text{н}} + \Delta q_{\text{н}}\right) + c_\mu\frac{\Delta q_{\text{н}}^2}{2} \approx c_{\text{н}}q_{\text{к}},\end{aligned} \tag{1.62}$$

то есть может быть приближенно вычислена путем умножения параметра сопротивления трения $c_{\text{н}}$ в начальном по ходу волны узле на относительный расход $q_{\text{к}}$ в конечном (противоположном) узле.

Используя формулу (1.62), получим выражения для интеграла уравнений (1.58) в фазовых плоскостях волн (вдоль характеристических направлений) в конечно-разностном виде.

Пусть $k + 1$ и k – два узла на гидролинии, имеющие координаты x_{k+1} и x_k, причем $x_{k+1} > x_k$. Относительное время пробега волн между узлами

$$\Delta\tau = \frac{\Delta t}{t_\mu} = \frac{x_{k+1} - x_k}{a}\frac{a}{l} = \frac{\Delta x}{l} = \Delta\overline{x}. \tag{1.63}$$

Обозначим начальный момент временного интервала интегрирования $\tau_{\text{н}} = i$, тогда конечный момент $\tau_{\text{к}} = \tau_{\text{н}} + \Delta\tau = i + 1$. Заменим дифференциалы в уравнении (1.58) конечными разностям, учитывая физический смысл волновых уравнений: волна F переносит информацию о параметрах потока по ходу течения жидкости, а волна G – против хода течения. Тогда, например, первый дифференциал в (1.58) для волны F мы должны представить как разность напора в узле с координатой x_{k+1} в момент времени $i + 1$ и напора в узле с координатой x_k в момент времени i, то есть $h_{k+1}^{i+1} - h_k^i$. Для волны G аналогичный дифференциал должен быть аппрок-

симирован, как $h_k^{i+1} - h_{k+1}^i$. Кроме того для волны F, в соответствии с (1.59) и (1.63), $\mathrm{d}\bar{x} \approx \Delta\tau$, для волны $G\,\mathrm{d}\bar{x} \approx -\Delta\tau$.

С учетом этих замечаний интегралы характеристических уравнений (1.58) в конечно-разностной форме можно выразить следующим образом:

- для волн F, бегущих вдоль оси x*

$$h_{k+1}^{i+1} - h_k^i + q_{k+1}^{i+1} - q_k^i + c_k^i q_{k+1}^{i+1}\Delta\tau = 0$$

или

$$h_{k+1}^{i+1} + \left(1 + c_k^i \Delta\tau\right) q_{k+1}^{i+1} = F_k^i, \tag{1.64}$$

где $F_k^i = h_k^i + q_k^i$ – волновая функция;

- для волн G, бегущих против оси x

$$h_k^{i+1} - h_{k+1}^i - q_k^{i+1} + q_{k+1}^i - c_{k+1}^i q_k^{i+1}\Delta\tau = 0$$

или

$$h_k^{i+1} - \left(1 + c_{k+1}^i \Delta\tau\right) q_k^{i+1} = G_{k+1}^i, \tag{1.65}$$

где $G_{k+1}^i = h_{k+1}^i - q_{k+1}^i$ – волновая функция.

В частном случае, когда расстояние меду соседними узлами $\Delta x = l$ $\Delta\tau = 1$ и уравнения (1.64) и (1.65) упрощаются

$$h_{k+1}^{i+1} + \left(1 + c_k^i\right) q_{k+1}^{i+1} = F_k^i, \tag{1.66}$$

$$h_k^{i+1} - \left(1 + c_{k+1}^i\right) q_k^{i+1} = G_{k+1}^i. \tag{1.67}$$

* В приведенных ниже соотношениях верхний индекс означает момент времени, а нижний индекс – номер узла гидролинии.

2. МЕДЛЕННО ИЗМЕНЯЮЩИЕСЯ ТЕЧЕНИЯ

2.1. Общие свойства и уравнения движения

В медленно изменяющихся течениях упругие свойства жидкости проявляются очень слабо. Это обусловлено тем, что скорость распространения упругих возмущений в жидкости очень велика ~ 10^3 м/с. Если длина гидролинии системы не очень большая, например, ~ 10 м, то возмущение (например, давления) распространится с одного ее конца до другого за t ~ 0,01 с. Пусть характерное время процесса (например, время изменения давления на одном конце гидролинии) составляет t^0 ~ 1 с. Так как $t >> t^0$, то разница давлений на противоположных концах гидролинии практически не будет заметна, так как скорость передачи возмущения давления с одного конца гидролинии на другой значительно выше скорости внесения в систему внешних возмущений давления. В данном случае можно считать, что жидкость ведет себя, как несжимаемая среда. Нестационарность изменения параметров потока в медленно изменяющихся течениях связана только с инерционностью жидкости.

Таким образом, основным допущением при математическом описании медленно изменяющихся течений является допущение несжимаемости жидкости, то есть $\mathrm{d}\rho / \mathrm{d}\,p = 0$.

С учетом этого допущения дифференциальные уравнения движения (1.34), (1.39) принимают вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{1}{g}\dfrac{\partial w}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(h_{\text{ц}} + \dfrac{\alpha w^2}{2g} + \dfrac{p}{g\rho} \right) + \dfrac{\tau P}{g\rho S} = 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Интегрирование уравнений (2.1) для некоторого произвольного момента времени вдоль оси трубопровода от сечения 1 до сечения 2 дает известное уравнение Бернулли с инерционным членом

$$H_1 - H_2 = \Delta H_\tau + \Delta H_t, \tag{2.2}$$

где $H = z + \dfrac{p}{\rho g} + \dfrac{\alpha w^2}{2g}$ – полный напор потока; $\Delta H_\tau = \int\limits_1^2 \dfrac{\tau P}{g\rho S}\mathrm{d}\,x$ – потери полного напора на преодоление сил вязкого сопротивления; $\Delta H_t = \dfrac{1}{g}\int\limits_1^2 \dfrac{\partial w}{\partial t}\mathrm{d}\,x$ – инерционный напор, обусловленный ускорением потока.

Последний член уравнения (2.2) представляет собой работу сил инерции жидкости. Она может быть как положительной, когда поток тормозится, что приводит к росту полного напора, или отрицательной, когда поток разгоняется. В последнем случае часть полного напора тратится на разгон жидкости. Если течение происходит в трубопроводе постоянного сечения длиной l, то инерционный напор ΔH_t можно определить по формуле

$$\Delta H_t = \frac{\alpha l}{g}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}. \tag{2.3}$$

2.2. Примеры медленно изменяющихся течений

2.2.1. Разгон потока жидкости

Рассмотрим истечение жидкости из большого резервуара в атмосферу через трубопровод после резкого (мгновенного) открытия затвора, рис. 2.1.

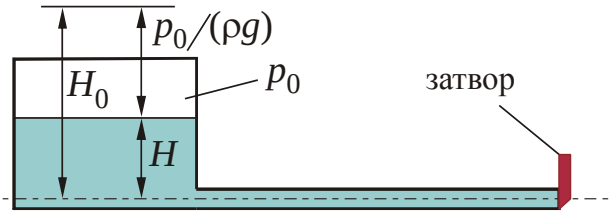


Рис. 2.1. Истечение жидкости из большого резервуара при открытии затвора

В зависимости от диаметра трубопровода и располагаемого напора в трубопроводе может реализоваться, как ламинарный, так и турбулентный режим течения. Точнее говоря, в начальный период разгона жидкости течение всегда ламинарное. Однако, если диаметр трубопровода и располагаемый напор достаточно большие, то интервал времени с ламинарным режимом может оказаться пренебрежимо малым.

Ламинарный режим. Если скоростной напор $w^2/(2g)$ мал по сравнению с располагаемым напором H_0, то уравнение Бернулли (2.2), записанное для сечений 0 и 1, можно представить в виде

$$H = \frac{32\nu l}{gd^2}w + \frac{l}{g}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}, \tag{2.4}$$

где ν – коэффициент кинематической вязкости жидкости; l, d – длина и диаметр трубопровода.

Положив в этом уравнении $\mathrm{d}w/\mathrm{d}t = 0$, получим скорость стационарного потока w_0, которая установится в конце разгона

$$w_0 = \frac{gd^2}{32\nu l}H_0. \tag{2.5}$$

Поделив уравнение (2.4) на H_0 и перейдя к относительной скорости $\bar{w} = w/w_0$, получим уравнение (2.4) в безразмерной форме

$$T_1\frac{\mathrm{d}\bar{w}}{\mathrm{d}t} = 1 - \bar{w}, \tag{2.6}$$

где $T = d^2/(32\nu)$ – постоянная времени.

Интегрируя (2.6) в пределах по времени от 0 до t, а по скорости – от 0 до $\bar{w}$, получим

$$\bar{w} = \frac{w}{w_0} = 1 - e^{-\frac{t}{T_1}}. \qquad (2.7)$$

Стационарное значение скорости достигается при $t \to \infty$. Однако уже при времени процесса $t \geq 4T_1$ разница между w и w_0 становится менее 2 %.

Полученная формула (2.7) верна при пренебрежимо малой величине скоростного напора. Будем считать, что $w_0 / (2gH_0) \leq 0{,}02$ отвечает этому требованию. Подставляя сюда выражение стационарной скорости из (2.5), получим

$$\frac{l}{d} \geq \frac{\mathrm{Re}}{9}, \quad \text{где} \quad \mathrm{Re} = \frac{d\sqrt{2gH_0}}{\nu}. \qquad (2.8)$$

Развитый турбулентный режим. Уравнение движения для данного случая запишется в виде

$$H_0 = (\alpha + \xi)\frac{w^2}{2g} + \frac{l}{g}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}, \qquad (2.9)$$

где α – коэффициент Кориолиса; ξ– коэффициент сопротивления трубопровода. Переходя в (2.9) к относительным переменным, получим

$$T_2 \frac{\mathrm{d}\bar{w}}{\mathrm{d}t} = 1 - \bar{w}^2, \qquad (2.10)$$

где $T_2 = lw_0 / (gH_0)$ – постоянная времени; $\bar{w} = w / w_0$ – относительная скорость потока, где стационарная скорость w_0 определяется по формуле

$$w_0 = \sqrt{\frac{2gH_0}{\alpha + \xi}}. \qquad (2.11)$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$\bar{w} = \frac{w}{w_0} = \frac{e^{\frac{2t}{T_1}} - 1}{e^{\frac{2t}{T_1}} + 1}. \qquad (2.12)$$

В данном случае текущее значение скорости отличается от стационарного значения менее, чем на 2 % через промежуток времени

$$t \geq 2{,}4T_2.$$

Формула (2.12) применима при развитом турбулентном режиме, то есть когда коэффициент трения λ не зависит от числа Рейнольдса. Это условие выполняется при $wd / \nu \geq 560 / \Delta$, где Δ – относительная шероховатость трубопровода. Принимая $w = w_0 / 3$, то есть требуя, чтобы развитое турбулентное течение было бы, по крайней мере, пока скорость потока изменится от значения $w_0/3$ до w_0 и подставляя в это неравенство (2.11) и выражение для коэффициента сопротивления

$$\xi = \lambda \frac{l}{d} = 0{,}11\Delta^{0{,}25}\frac{l}{d},$$

после перегруппировки получим выражение для относительной длины трубопровода, обеспечивающего применимость формулы (2.12):

$$\frac{l}{d} \le \frac{9}{\Delta^{0,25}}\left[\left(\frac{\Delta \mathrm{Re}}{1680}\right)^2 - 1\right]. \qquad (2.13)$$

График изменения скорости при разгоне жидкости в относительных переменных для ламинарного и турбулентного режимов показан на рис. 2.2.

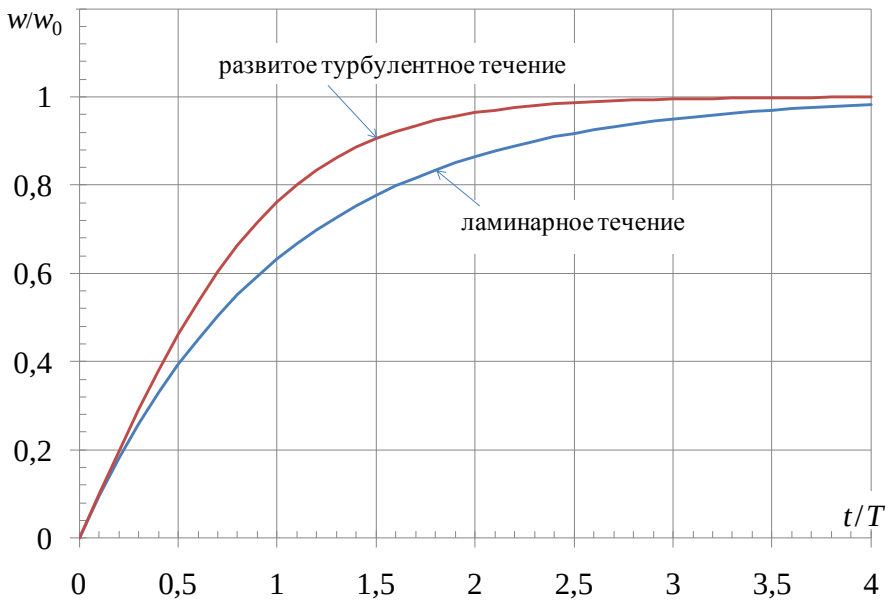


Рис. 2.2. Изменение скорости жидкости в трубопроводе при открытии затвора

2.2.2. Выравнивание уровней жидкости в сообщающихся сосудах

Рассмотрим процесс выравнивания уровней жидкости в двух связанных между собой трубопроводом емкостями при мгновенном открытии затвора, рис. 2.3.

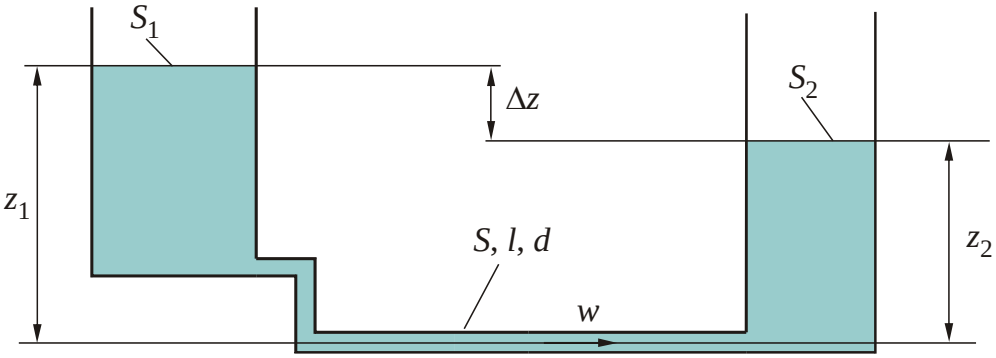


Рис. 2.3. Сообщающиеся емкости с начальной разницей уровней

До открытия затвора разность уровней была Δz_0, а скорость потока $w = 0$. Будем считать емкости открытыми, а скоростными напорами при движении жидкости в емкостях будем пренебрегать по сравнению со скоростным напором в трубопроводе. Уравнение Бернулли (2.2), записанное для сечений, связанных со свободными поверхностями жидкости может быть представлено в виде

$$\Delta z = \Delta H_\tau + \frac{l}{g}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}. \qquad (2.14)$$

Течение в трубопроводе будем считать ламинарным. Тогда

$$\Delta H_\tau = \frac{32\nu l}{gd^2} w. \tag{2.15}$$

Исходя из закона сохранения массы, можем записать

$$-\frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}t} S_1 = wS; \quad \frac{\mathrm{d}z_2}{\mathrm{d}t} S_2 = wS, \tag{2.16}$$

где S_1, S_2, S – площадь поперечного сечения 1-го и 2-го баков и трубопровода соответственно.

Учитывая, что $\Delta z = z_1 - z_2$, из (2.16) получим

$$\frac{\mathrm{d}\Delta z}{\mathrm{d}t} = -wS\left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2}\right). \tag{2.17}$$

Выражая w из (2.17) и подставляя результат в (2.15) и (2.14), получим уравнение, описывающее изменение разности уровней в емкостях

$$T^2 \frac{\mathrm{d}^2 \Delta\overline{z}}{\mathrm{d}t^2} + 2\zeta T \frac{\mathrm{d}\Delta\overline{z}}{\mathrm{d}t} + \Delta\overline{z} = 0, \tag{2.18}$$

где $T = \sqrt{\frac{l}{g}\frac{S_1 S_2}{S(S_1 + S_2)}}$ – постоянная времени; $\zeta = \frac{16\nu T}{d^2}$ – параметр сопротивления; $\Delta\overline{z} = \Delta z / \Delta z_0$ – относительная разница уровней.

Решение уравнения (2.18) зависит от параметра сопротивления ζ. Возможны три случая.

1. При $\zeta > 1$

$$\Delta\overline{z} = e^{-\zeta\frac{t}{T}}\left[\frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} \operatorname{sh}\sqrt{\zeta^2 - 1}\frac{t}{T} + \operatorname{ch}\sqrt{\zeta^2 - 1}\frac{t}{T}\right]. \tag{2.19}$$

2. При $\zeta = 1$

$$\Delta\overline{z} = e^{-\frac{t}{T}}\left(1 + \frac{t}{T}\right). \tag{2.20}$$

3. При $\zeta < 1$

$$\Delta\overline{z} = e^{-\zeta\frac{t}{T}}\left[\frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin\sqrt{1 - \zeta^2}\frac{t}{T} + \cos\sqrt{1 - \zeta^2}\frac{t}{T}\right]. \tag{2.21}$$

В первом и втором случаях силы сопротивления достаточно большие и процесс изменения уровня носит апериодический характер. В третьем случае ($\zeta < 1$) выравнивание уровней сопровождается колебаниями с частотой

$$\omega = \frac{1}{T}\sqrt{1 - \zeta^2} = \sqrt{\frac{gS}{l}\left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2}\right) - \left(\frac{16\nu}{d^2}\right)^2}. \tag{2.22}$$

График изменения уровней для всех трех возможных ситуаций показан на рис. 2.4.

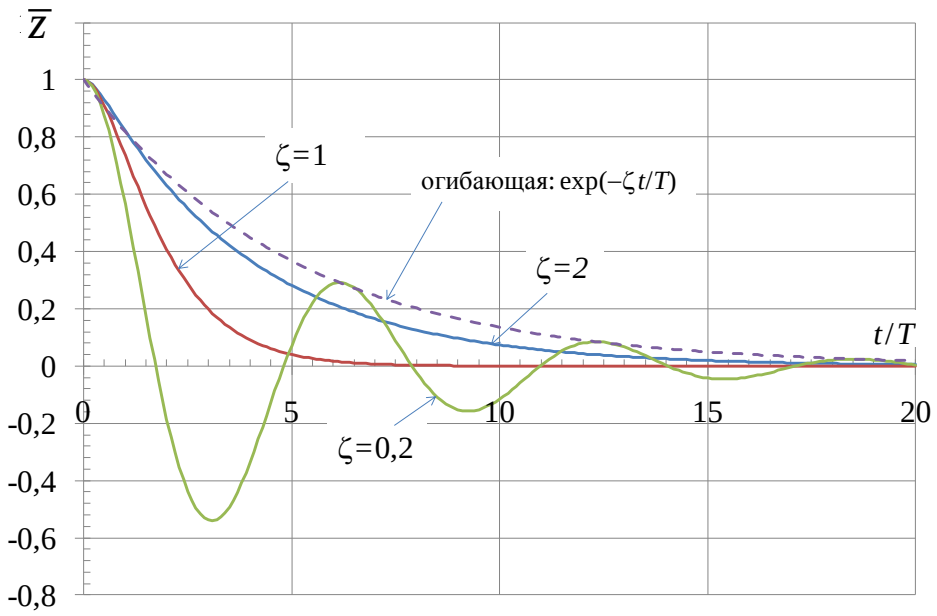


Рис. 2.4. Выравнивание уровней в сообщающихся емкостях при различных величинах параметра сопротивления ζ

2.2.3. Предельная частота движений поршня насоса

На рис. 2.5 приведена схема простейшего поршневого насоса. Перемещение поршня описывается функцией

$$x = r\left(1 - \cos\omega t\right), \tag{2.23}$$

где r, ω – радиус и частота вращения кривошипа.

Перемещение поршня обуславливает нестационарное движение жидкости в цилиндре. При больших частотах вращения давление в цилиндре может упасть ниже критического, что вызовет кавитацию. Определим предельную частоту вращения.

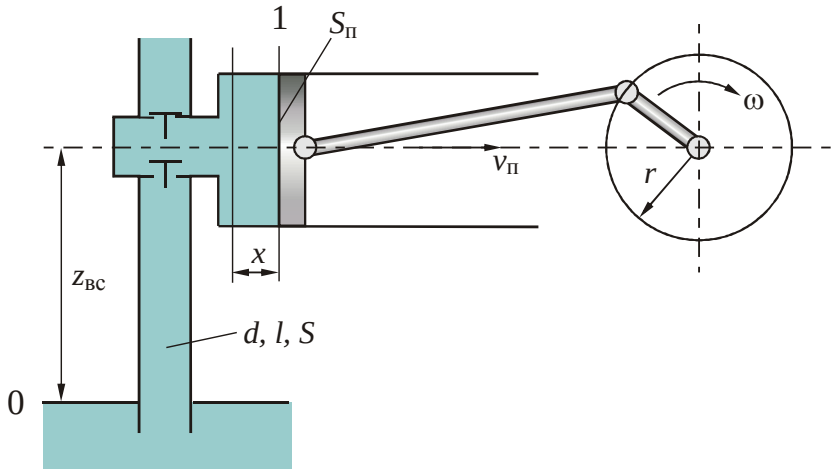


Рис. 2.5. Схема поршневого насоса

Уравнение Бернулли, записанное для сечений 0 и 1, имеет вид

$$\frac{p_{\text{ат}}}{\rho g} = z_{\text{вс}} + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha v_{\text{п}}}{2g} + \Delta H_\tau + \Delta H_i,$$

откуда находим

$$p_1 = p_{\text{ат}} - \rho g\left(z_{\text{вс}} + \frac{\alpha v_{\text{п}}^2}{2g} + \Delta H_\tau + \Delta H_i\right), \qquad (2.24)$$

где составляющие напора ΔH_τ и ΔH_i определяются формулами

$$\Delta H_\tau = \left(\xi_{\text{вх}} + \lambda\frac{l}{d} + \xi_{\text{кл}}\right)\frac{w^2}{2g} = \xi_{01}\left(\frac{S_{\text{п}}}{S}\right)^2\frac{v_{\text{п}}^2}{2g};$$

$$\Delta H_i = \frac{l}{g}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} + \frac{x}{g}\frac{\mathrm{d}v_{\text{п}}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{g}\left(l\frac{S_{\text{п}}}{S} + x\right)\frac{\mathrm{d}v_{\text{п}}}{\mathrm{d}t}.$$

Здесь $\xi_{\text{вх}}$, $\xi_{\text{кл}}$ – коэффициенты потерь напора на вход и клапана соответственно.

Скорость и ускорение поршня найдем дифференцированием (2.23):

$$v_{\text{п}} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \omega r\sin\omega t; \quad \frac{\mathrm{d}v_{\text{п}}}{\mathrm{d}t} = \omega^2 r\cos\omega t.$$

Из последних соотношений видно, что ускорение поршня, а значит и инерционный напор ΔH_i максимальны по абсолютной величине в начале $(\omega t = 0)$ и в конце $(\omega t = \pi)$ всасывания, а скорость и, следовательно, потери напора достигают наибольшего значения при $\omega t = \pi/2$.

На рис. 2.6 показано изменение давления в сечении 1 (около поршня) при всасывании жидкости $(0 \le \omega t \le \pi)$, причем моменту времени $\omega t = 0$ соответствует крайнее левое положение поршня. На рисунке текущие давления отнесены к атмосферному.

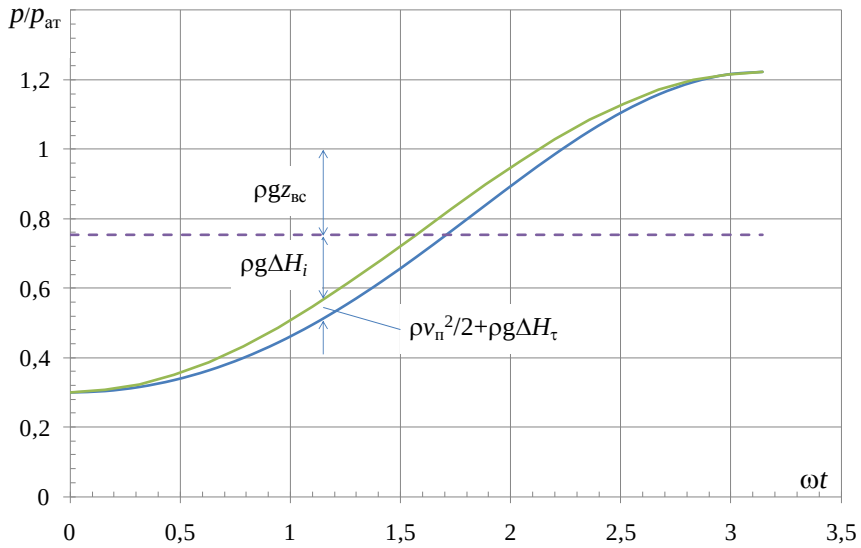


Рис. 2.6. Изменение давления на поршне насоса в течение цикла всасывания

Из приведенных данных видно, что инерционная составляющая давления может быть весьма существенной. При этом в начале хода поршня инерционная со-

ставляющая положительна, так как поток разгоняется и на разгон затрачивается часть атмосферного давления. В конце хода (при $\omega t = \pi$) поток тормозится, инерционная составляющая давления отрицательна. Как следствие, суммарное давление на поршне превышает атмосферное.

Наиболее низкое давление в цилиндре наблюдается в начале всасывания $(\omega t = 0)$ при этом

$$p_{1\min} = p_{\text{ат}} - \rho g z_{\text{вс}} - \rho l \left(\frac{S_{\text{п}}}{S} \right) \omega^2 r .$$

Отсюда (при $p_{1\min} = p_{\text{н}}$) следует выражение для предельной частоты движений поршня $\omega_{\text{пр}}$

$$\omega_{\text{пр}} = \sqrt{\frac{p_{\text{ат}} - p_{\text{н}} - \rho g z_{\text{вс}}}{\rho l r} \left(\frac{S}{S_{\text{п}}} \right)},$$

где $p_{\text{н}}$ – давление насыщенных паров жидкости.

3. ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕСЫ В ГИДРОСИСТЕМЕ

3.1. Описание волн

Общие замечания. Первичные волны, появляющиеся в самом начале волнового процесса, вызывается, как правило, внешним воздействием на поток через какой-нибудь элемент гидросистемы. Это воздействие приводит к изменению скорости течения и давления. Для описания первичной волны необходимо знать, какое именно изменение параметров происходит. От этого зависит качество расчетной модели волнового процесса и точность результатов расчета.

Все последующие волны, если нет других внешних воздействий, являются отраженными. Они появляются в результате взаимодействия ранее сформировавшихся волн с различными элементами гидросистемы и элементами неоднородности соединительных трубопроводов.

Волна от поршневого осциллятора. Опишем и исследуем первичную волну, которая создается в потоке жидкости поршневым осциллятором, рис. 3.1. Дроссель с малым проходным сечением, установленный перед осциллятором, препятствует проникновению возмущений через него и обеспечивает практически постоянный расход жидкости Q_0. Такой же расход будет наблюдаться через сечение A гидросистемы и при неработающем осцилляторе.

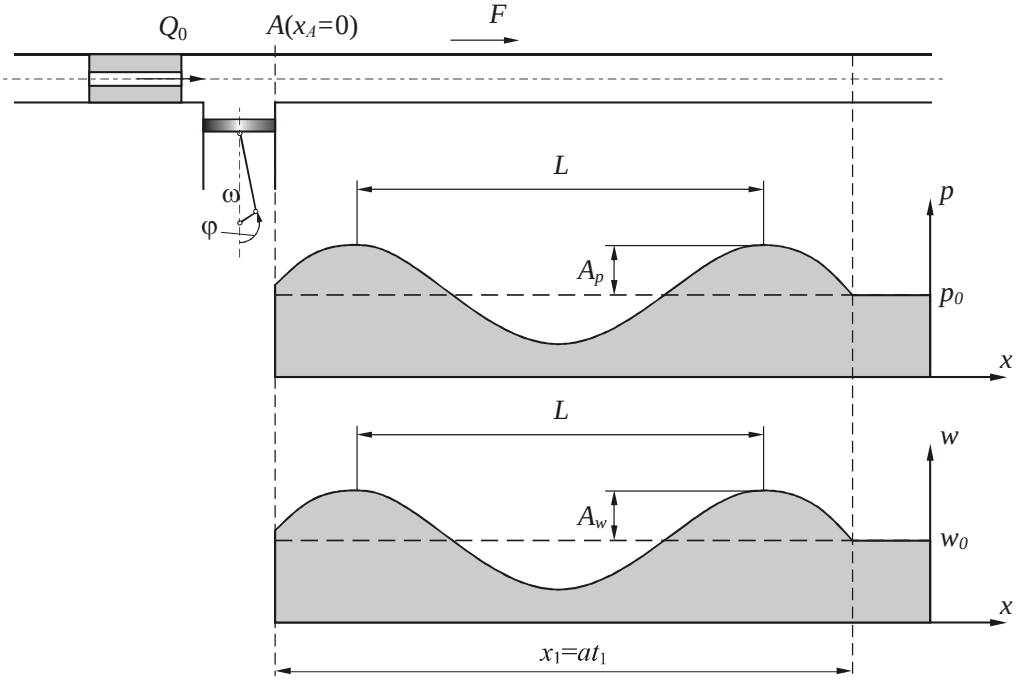


Рис. 3.1. Генерация волны поршневым осциллятором

После включения осциллятора расход через сечение A будет изменяться: увеличиваться при движении поршня осциллятора вверх и уменьшаться – при движении вниз. Если длина шатуна у осциллятора велика по сравнению с радиусом кривошипа, то закон движения поршня описывается уравнением

$$y = e_{\text{п}}\left[1 - \cos\left(\omega t + \varphi_0\right)\right], \tag{3.1}$$

где y – перемещение поршня, отсчитываемой от крайнего положения, $e_п$ – амплитуда колебаний поршня, равная половине его хода; ω – угловая частота вращения рычага кривошипно-шатунного механизма; φ_0 – начальный угол поворота кривошипа.

Дифференцируя (3.1), получим выражение для скорости поршня $v_п$

$$v_п = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \omega e_п \sin\left(\omega t + \varphi_0\right).$$

Тогда расход жидкости, создаваемый движением поршня, запишется, как

$$Q_п = v_п S_п = \omega e_п S_п \sin\left(\omega t + \varphi_0\right),$$

где $S_п$ – площадь поршня.

Следовательно, при работе осциллятора расход жидкости через сечение A запишется, как

$$Q_А = Q_0 + Q_п = Q_0 + e_п \omega S_п \sin\left(\omega t + \varphi_0\right), \tag{3.2}$$

а скорость потока в этом сечении, как

$$w_A = \frac{Q_A}{S} = w_0 + e_п \omega \frac{S_п}{S} \sin\left(\omega t + \varphi_0\right), \tag{3.3}$$

где $w_0 = Q_0 / S$ – стационарная составляющая скорости; S – площадь поперечного сечения трубопровода.

В качестве начальных условий задачи примем следующие: в момент времени $t = 0$ скорость потока в трубопроводе w_0, давление p_0, поршень находится в крайнем нижнем положении ($\varphi_0 = 0$).

В этом случае изменение скорости в сечении A трубопровода по сравнению со стационарным значением составит

$$w_A - w_0 = \omega e_п \frac{S_п}{S} \sin \omega t. \tag{3.4}$$

С другой стороны, для идеальной жидкости в соответствии с волновым уравнением (1.54) пока нет обратной волны ($G = 0$) имеем

$$w_A - w_0 = \frac{F_A}{\rho a}. \tag{3.5}$$

Из (3.4) и (3.5) следует выражение для волновой функции в сечении A

$$F_A = \rho a \omega e_п \frac{S_п}{S} \sin \omega t. \tag{3.6}$$

Так как $F\left(t, x\right) = F_A\left(t - x / a\right)$, то общее выражение для волновой функции будет иметь вид

$$\begin{cases} F\left(t, x\right) = \rho a \omega e_п \dfrac{S_п}{S} \sin \omega \left(t - \dfrac{x}{a}\right) & \text{при } t \geq \dfrac{x}{a}; \\ F\left(t, x\right) = 0 & \text{при } t < \dfrac{x}{a}. \end{cases} \tag{3.7}$$

С помощью волновой функции (3.7) и волновых уравнений (1.54) находим следующие выражения для определения скорости и давления потока в любом сечении трубопровода до момента появления в данном сечении обратной волны

$$\begin{cases} \text{при } t < \dfrac{x}{a} & p = p_0, \quad w = w_0; \\ \text{при } t \geq \dfrac{x}{a} & p = p_0 + \rho a \omega e_{\text{п}} \dfrac{S_{\text{п}}}{S} \sin\omega\left(t - \dfrac{x}{a}\right), . \\ & w = w_0 + \omega e_{\text{п}} \dfrac{S_{\text{п}}}{S} \sin\omega\left(t - \dfrac{x}{a}\right). \end{cases} \tag{3.8}$$

На рис. 3.1 показано распределение давлений и скоростей у потока вдоль трубопровода в момент времени t_1. В этот момент фронт волны располагается в сечении $x_1 = at_1$, а перед фронтом невозмущенное течение ($w = w_0$, $p = p_0$) Проанализируем полученные результаты.

1. Колебания поршня с амплитудой $e_{\text{п}}$ и частотой ω генерируют колебания частиц жидкости с той же частотой, но иной амплитудой

$$e_A = e_{\text{п}} S_{\text{п}} / S\,. \tag{3.9}$$

2. Колебания частиц потока происходят относительно тех положений, которые бы они занимали, двигаясь с постоянной скоростью w_0.

3. Периодическое расширение и сжатие жидкости вызывает повышение и понижение давления и скорости. Частота этих колебаний равна частоте осциллятора, а амплитуды составляют

$$\begin{cases} A_p = \rho a \omega e_{\text{п}} S_{\text{п}} / S = \rho a \omega e_A; \\ A_w = \omega e_{\text{п}} S_{\text{п}} / S = \omega e_A. \end{cases} \tag{3.10}$$

Следует обратить внимание на пропорциональность амплитуды давления скорости волны a. Поэтому изменения давления в нестационарном процессе могут быть очень большими.

4. Предельное расширение (снижение давления) определяется условием сплошности жидкости, то есть давлением насыщенных паров жидкости $p_{\text{н}}$ при данной температуре. Для исключения разрыва потока частота осциллятора не должна превышать критическую $\omega_{\text{кр}}$

$$\omega < \omega_{\text{кр}} = \frac{p_0 - p_{\text{н}}}{\rho a e_{\text{п}}} \frac{S_{\text{п}}}{S} = \frac{p_0 - p_{\text{н}}}{\rho a e_A}\,. \tag{3.11}$$

5. Из (3.8) видно, что амплитуда колебаний остается постоянной в любом сечении трубопровода, что является следствием предположения об идеальности жидкости. Вместе с тем фаза колебаний изменяется при переходе от одного сечения к другому

$$\Delta\varphi = \varphi(x) - \varphi_A(x = 0) = -\frac{\omega L}{a}\frac{x}{L} = -2\pi\frac{x}{L}, \tag{3.12}$$

где $\Delta\varphi$ – сдвиг фазы колебаний в сечении с координатой x по сравнению с колебаниями в сечении A с координатой $x = 0$; L – длина волны, определяемая формулой

$$L = aT = 2\pi a / \omega, \tag{3.13}$$

где $T = 2\pi/\omega$ – период колебаний.

Как видно из (3.12) отставание по фазе линейно растет по мере удаления от начального сечения A.

6. Соотношения (1.20), (3.10), (3.12), (3.13) позволяют проследить влияние модуля упругости жидкости на характеристики волн, вызывающих гармонические колебания. Рост модуля упругости при прочих равных условиях приводит к увеличению скорости, длины волны, частоты и амплитуды колебаний. Сдвиг фазы колебаний уменьшается. В несжимаемой жидкости $E_ж \to \infty, a \to \infty, L \to \infty, \Delta\varphi \to 0$. То есть возмущения распространяются мгновенно по всему объему жидкости и все частицы жидкости колеблются в одной фазе.

Волна при открытии (закрытии) клапана. Будем считать, что открытие или закрытие клапана происходит мгновенно, что формирует ступенчатый фронт волны, рис. 3.2.

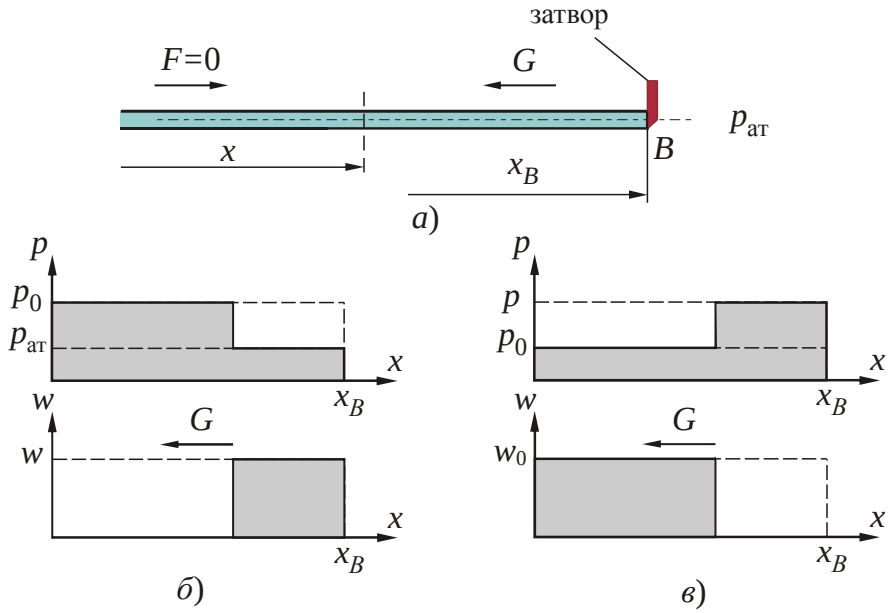


Рис. 3.2. Возникновение волн при открытии (закрытии) клапана

Рассмотрим волну при полном открытии клапана. Пусть в начальном состоянии клапан закрыт ($w = 0$), давление в трубопроводе p_0, внешне давление – атмосферное.

После мгновенного полного открытия клапана в момент времени t_0 давление в конце трубопровода (в сечении B) резко упадет на величину $\Delta p = -(p_0 - p_{ат})$, поэтому изменение давления перед затвором может быть описано разрывной ступенчатой функцией времени:

$$p_B = p_0 + \Delta p(t), \text{ где } \Delta p = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_0; \\ -(p_0 - p_{ат}) & \text{при } t > t_0. \end{cases} \tag{3.14}$$

В соответствии с уравнением (1.54) локальное (в сечении B) значение волновой функции $G_B(t) = \Delta p(t)$, так как в начальной стадии процесса $F = 0$. Общее выражение для волновой функции

$$G(t,x)=G_B\left(t-\frac{x_B-x}{a}\right)=\Delta p=\begin{cases}0 & \text{при} \quad t<t_0+\dfrac{x_B-x}{a};\\ -\left(p_0-p_{\text{ат}}\right) & \text{при} \quad t>t_0+\dfrac{x_B-x}{a}.\end{cases} \tag{3.15}$$

Изменение скорости, вызываемое этой волной, в соответствии с (1.54) при времени $t>t_0+\left(x_B-x\right)/a$ найдется, как

$$w=-\frac{G}{\rho a}=\frac{p_0-p_{\text{ат}}}{\rho a}. \tag{3.16}$$

При временах меньших указанного жидкость сохраняет состояние покоя.

Рассмотрим волну при полном закрытии клапана. Пусть начальное состояние потока характеризуется параметрами: w_0, p_0. После мгновенного полного закрытия клапана в момент времени t_0 скорость течения в конце трубопровода (в сечении B) резко упадет до нуля. Следовательно, изменение скорости в сечении B составит

$$w_B=w_0-\Delta w(t), \text{ где } \Delta w(t)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad t<t_0;\\ w_0 & \text{при} \quad t>t_0.\end{cases} \tag{3.17}$$

Локальное значение волновой функции $G_B(t)=-\rho a\left(w_B-w_0\right)=\rho a\Delta w(t)$, а ее общее выражение

$$G(t,x)=G_B\left(t-\frac{x_B-x}{a}\right)=\rho a\,\Delta w, \tag{3.18}$$

где

$$\Delta w=\begin{cases}0 & \text{при} \quad t<t_0+\dfrac{x_B-x}{a};\\ w_0 & \text{при} \quad t>t_0+\dfrac{x_B-x}{a}.\end{cases} \tag{3.19}$$

Повышение давления, вызываемое этой волной при $t>t_0+\left(x_B-x\right)/a$ составит

$$p-p_0=G=\rho a\Delta w=\rho a w_0. \tag{3.20}$$

Изменение давления и скорости потока в трубопроводе, вызванное первичными волнами, показано на рис. 3.2, *б* и 3.2, *в*.

3.2. Взаимодействие волн с различными элементами гидросистемы

3.2.1. Отражение волны от упругого элемента гидросистемы

Пусть в конце трубопровода установлена небольшая емкость, полностью или частично заполненная рабочей жидкостью, рис. 3.3.

Пусть объем емкости равен W_0, приведенный модуль упругости E_0

$$\frac{1}{E_0}=\frac{1-\beta}{E_{\text{ж}}}+\frac{\beta}{E_{\text{г}}}.$$

Выясним закономерности отражения волны F от емкости, считая константами W_0 и E_0.

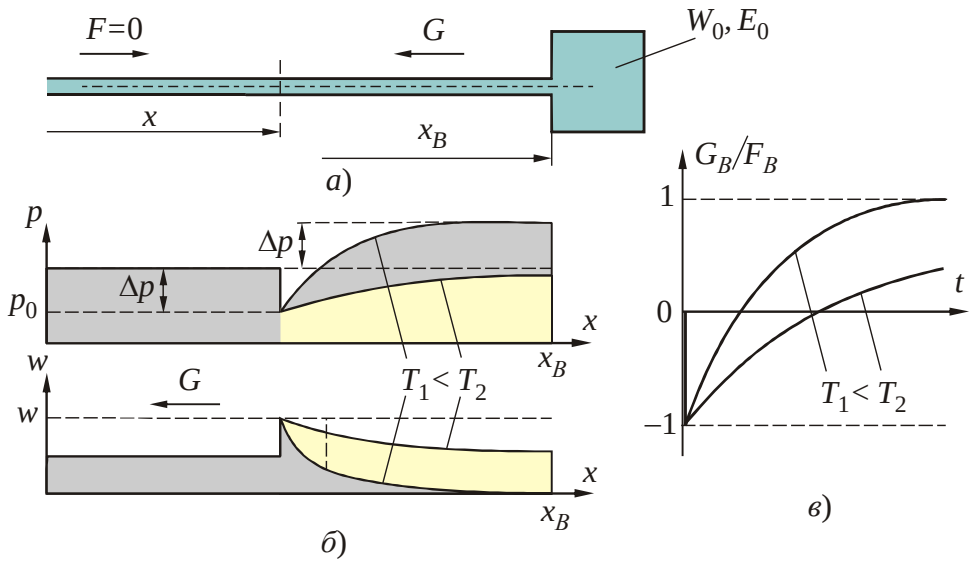


Рис. 3.3. Отражение волн от концевой емкости

Уравнение сохранения массы для концевой емкости запишется в виде

$$\frac{\mathrm{d}\rho W_0}{\mathrm{d}t} = \rho w_B S \quad \text{или} \quad \frac{W_0}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = w_B S$$

или, используя определение модуля упругости,

$$\frac{W_0}{E_0}\frac{\mathrm{d}\,p_B}{\mathrm{d}t} = w_B S\,. \tag{3.21}$$

Давление в емкости и в сечении B трубопровода считаем одинаковыми.

Обозначим давление в сечении B трубопровода до момента прихода волны F к данному сечению (то есть при $t < 0$) через p_0, а скорость жидкости – через w_0. При этом $w_0 = 0$, так как узел тупиковый.

В соответствии с волновыми уравнениями можем записать

$$p_B - p_0 = F_B + G_B; \quad w_B - w_0 = \frac{F_B - G_B}{\rho a}\,. \tag{3.22}$$

Подставляя (3.22) в (3.21), получим

$$\frac{W_0}{E_0}\frac{\mathrm{d}\left(F_B + G_B\right)}{\mathrm{d}t} = \frac{\left(F_B - G_B\right)}{\rho a}S \quad \text{или} \quad T\frac{\mathrm{d}\left(F_B + G_B\right)}{\mathrm{d}t} + \left(F_B + G_B\right) = 2F_B, \tag{3.23}$$

где T – постоянная времени, выражаемая формулой

$$T = \frac{\rho a W_0}{S E_0}\,. \tag{3.24}$$

Интегрируя (3.23), получим выражение локальной (в сечении B) волновой функции для отраженной волны G в зависимости от волновой функции пришедшей (прямой) волны F и постоянной времени T:

$$G_B = -F_B + \frac{2}{T}e^{-\frac{t}{T}}\int_0^t F_B e^{\frac{t}{T}}\,\mathrm{d}t\,. \tag{3.25}$$

В частном случае, когда прямая волна несет ступенчатое изменение давления $F_B = \Delta p = \mathrm{const}$, выражение (3.25) упрощается

$$G_B = F_B\left[-1+2e^{-\frac{t}{T}}\left(e^{\frac{t}{T}}-1\right)\right] = F_B\left(1-2e^{-\frac{t}{T}}\right). \qquad (3.26)$$

Анализируя полученный результат, прежде всего обратим внимание на два предельных случая: отражение волны от бесконечно большого объема ($W_0 \to \infty$) и отражение от жесткой стенки ($W_0 \to 0$).

В первом случае постоянная времени $T \to \infty$. Тогда, в соответствии с (3.25)

$$G_B = -F_B.$$

Таким образом, *большой резервуар или граница потока с постоянным давлением отражает волны, изменяя знак волновой функции на противоположный и сохраняя ее абсолютное значение.* Так, например, волна сжатия отразится волной расширения.

Рассмотрим пример. Труба, заполненная жидкостью, имеет открытый в атмосферу конец, рис. 3.4, *а*. Пусть в сторону открытого конца распространяется волна F, вызывающая повышение давления в жидкости слой за слоем по мере ее продвижения. Последнее повышение давления может наблюдаться только предпоследнего слоя, а последний (предполагается очень тонкий) слой сдвинется под действием перепада давлений в атмосферу. Это перемещение последнего слоя будет сопровождаться понижением давления на его границе с предпоследним слоем, что вызовет перемещение предпоследнего слоя и т. д. Видим, что с приходом волны сжатия F к свободной поверхности возникает новая волна G, которая вызывает расширение жидкости в сторону свободной поверхности и связанное с ним понижение давления, которое по абсолютной величине равно повышению давления в волне F, так как давление на свободной поверхности неизменно.

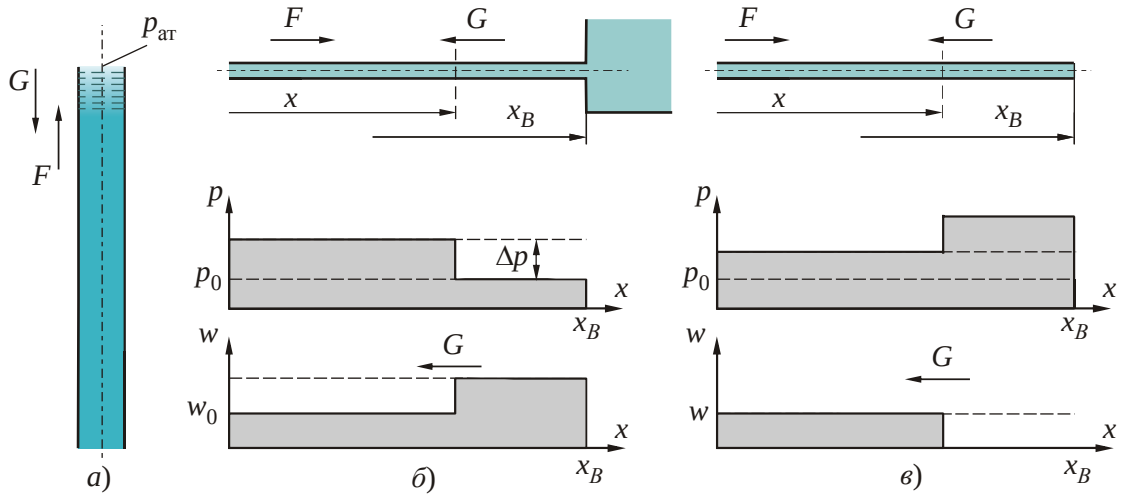


Рис. 3.4. Отражение волны от большого объема и жесткой преграды

В другом предельном случае (жесткой преграды) $T \to 0$. Из (3.26) следует, что в этом случае

$$G_B = F_B.$$

Таким образом, волны отражаются от жесткой преграды, сохраняя величину и знак волновой функции. То есть волны сжатия отражаются волнами сжатия и наоборот волны расширения – волнами расширения.

На рис. 3.4, *б* и 3.4, *в* показана интерференция первичных и отраженных волн вблизи большого резервуара и заглушенного конца трубопровода. В первом случае изменения давления, вызываемые обеими волнами, полностью компенсируются, а во втором – складываются. То есть в ходе волнового процесса большая емкость поддерживает давление стабильным, а тупиковый конец – усиливает изменение давления.

В общем случае емкости конечного размера, процесс отражения волны является нестационарным. В начале ($t \to 0$) отражение происходит как от большой емкости $G_B = -F_B$, а с течением времени оно изменяется и при $t \to \infty$ становится таким, как от жесткой преграды $G_B = F_B$. Продолжительность переходного процесса зависит от постоянной времени *T*. С уменьшением *T* время переходного процесса сокращается, см. рис.3.3, *в*.

Общее выражение для характеристической функции отраженной волны при ступенчатой прямой волне получаем из (3.26), вспоминая свойство волновых функций

$$G_B(t,x) = G_B\left(t - \frac{x_B - x}{a}\right) = F_B\left(1 - 2e^{-\frac{t}{T} + \frac{x_в - x}{aT}}\right), \tag{3.27}$$

где $F_B = \Delta p$ – локальное значение характеристической функции пришедшей волны. На рис. 3.3 показано изменение давления и скорости потока вдоль трубопровода, вызванное отраженной волной в фиксированный момент времени, когда фронт волны достиг сечения с координатой *x*.

На интенсивность изменения давления и скорости вдоль трубопровода, также как и на интенсивность изменения этих параметров по времени в любом фиксированном сечении существенно влияет постоянная времени. Чем меньше *T*, тем интенсивнее изменяются параметры.

Рассмотрим теперь отражение от емкости гармонической падающей волны, у которой

$$F_B = \Delta p \sin \omega t\,. \tag{3.28}$$

Вычислим, используя (3.28) интеграл, входящий в выражение (3.25):

$$\int_0^t F_B e^{\frac{t}{T}}\,\mathrm{d}t = \Delta p \int_0^t e^{\frac{t}{T}} \sin \omega t\,\mathrm{d}t = \frac{\Delta p T^2}{1 + \omega^2 T^2}\left[e^{\frac{t}{T}}\left(\frac{1}{T}\sin \omega t - \omega \cos \omega t\right)\right]_0^t =$$

$$= \frac{\Delta p T}{1 + \omega^2 T^2}\left[e^{\frac{t}{T}}\left(\sin \omega t - \omega T \cos \omega t\right) + \omega T\right].$$

Тогда

$$G_B = -\Delta p \sin\omega t + \frac{2\Delta p}{1+\omega^2 T^2} e^{-\frac{t}{T}} \left[e^{\frac{t}{T}} \left(\sin\omega t - \omega T \cos\omega t \right) + \omega T \right] =$$

$$= \frac{\Delta p}{1+\omega^2 T^2} \left[\left(1-\omega^2 T^2 \right) \sin\omega t - 2\omega T \cos\omega t \right] + \frac{2\Delta p \omega T}{1+\omega^2 T^2} e^{-\frac{t}{T}}.$$

Выражение в квадратных скобках можно представить в виде синуса суммы двух углов, положив

$$1-\omega^2 T^2 = b\cos\Delta\varphi, \quad -2\omega T = b\sin\Delta\varphi, \tag{3.29}$$

где

$$b = \sqrt{1+\omega^2 T^2 + 4\omega^2 T^2} = 1+\omega^2 T^2, \quad \operatorname{tg}\Delta\varphi = \frac{-2\omega T}{1-\omega^2 T^2}, \tag{3.30}$$

$$\Delta\varphi = \begin{cases} -\operatorname{arctg}\dfrac{2\omega T}{1-\omega^2 T^2} & \text{при} \quad \omega t < 1; \\ -\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{2\omega T}{\omega^2 T^2 - 1} & \text{при} \quad \omega t > 1. \end{cases} \tag{3.31}$$

С учетом этих преобразований имеем

$$G_B = \Delta p \sin\left(\omega t + \Delta\varphi\right) + \frac{2\Delta p \omega t}{1+\omega^2 T^2} e^{-\frac{t}{T}}. \tag{3.32}$$

Первое слагаемое в правой части характеризует стационарные колебания, вызванные отраженной волной при $t >> T$. Второе слагаемое характеризует искажение этих колебаний в начальный (переходный) период отражения волны. Видно, что время переходного процесса тем меньше, чем меньше *T*.

Сравнивая колебания давления в прямой (3.28) и отраженной (3.32) волнах видим, что глухая (непроточная) емкость не изменяет амплитуды и частоты стационарных колебаний, а изменяет лишь фазу колебаний. Так как $\Delta\varphi < 0$, то колебания в отраженной волне запаздывают по фазе от колебаний в прямой волне. Это запаздывание растет с увеличением частоты.

Рассмотрим частные случаи отражения гармонической волны: от большого резервуара и от жесткой стенки. Если емкость имеет большой объем $W_0 \to \infty$ тогда $T \to \infty$. При этом $\Delta\varphi \to \pi$ и, следовательно, $G_B \to \Delta p \sin\left(\omega t - \pi\right) = -\Delta p \sin\omega t = -F_B$. Если концевым элементом является жесткая стенка, то $W_0 \to 0$ и $T \to 0$. При этом $\Delta\varphi \to 0$. Следовательно, $G_B \to \Delta p \sin\omega t = \Delta p \sin\omega t = F_B$.

Таким образом, отражение волн, несущих гармонические колебания давления от жесткой стенки не вызывает изменения амплитуды, частоты и фазы, а отражение от большого резервуара сопровождается изменением фазы на $-\pi$ с сохранением частоты и амплитуды.

3.2.2. Прохождение волны через дроссель

На рис. 3.5 показан дроссель, установленный в длинный трубопровод, который предоставляет собой вставку в трубопровод с узким каналом, площадь поперечного сечения которого $S_0 << S$. Длина канала дросселя l_0.

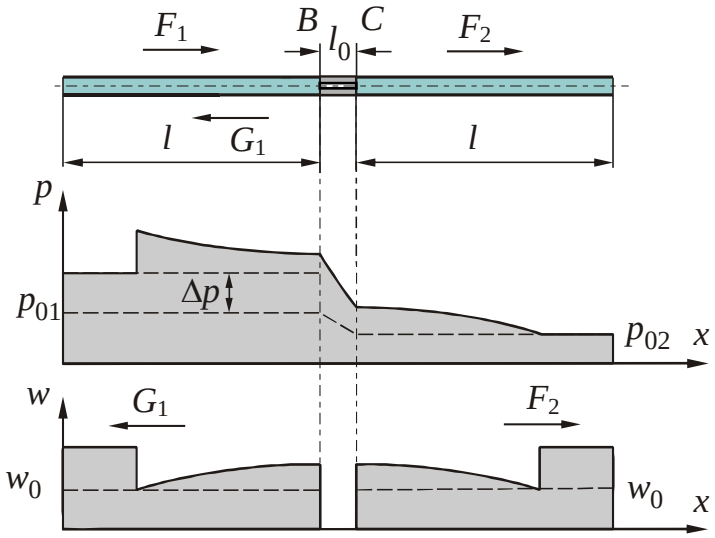


Рис. 3.5. Взаимодействие волн с дросселем

Выясним характер взаимодействия прямой волны, которую обозначим F_1, с дросселем. Физическая картина процесса взаимодействия следующая: прямая волна F_1, достигнув дросселя, частично отразится от него в виде волны G_1, а частично пройдет сквозь дроссель в виде волны F_2. Найдем параметры волн F_2 и G_1. Для этого выделим два сечения трубопровода B – до дросселя и C – после дросселя. Параметры потока в этих сечениях подчиняются закону сохранения массы и механической энергии. Рассмотрим их.

1. Закон сохранения массы, считая, что плотность жидкости при прохождении дросселя не меняется, запишем в виде

$$w_B S = w_0 S_0 = w_C S, \tag{3.33}$$

где w_0 – скорость жидкости в канале дросселя.

2. Закон сохранения механической энергии (уравнение Бернулли) для рассматриваемых сечений имеет вид

$$p_B = p_C + \Delta p_д + \Delta p_i, \tag{3.34}$$

где $\Delta p_д$ – потери давления за счет вязкого сопротивления дросселя; Δp_i – инерционный перепад давления на дросселе, определяемый по формуле

$$\Delta p_i = \rho l_0 \frac{\mathrm{d}w_0}{\mathrm{d}t}. \tag{3.35}$$

Условия (3.33) и (3.34) выполняются в любой момент волнового процесса. В начальный момент (до прихода к дросселю волны F_1) течение стационарно, поэтому $\Delta p_i = 0$ и, следовательно

$$w_{B0} S = w_{00} S_0 = w_{C0} S, \tag{3.36}$$

$$p_{B0} = p_{C0} + \Delta p_{д0}. \tag{3.37}$$

Здесь вторым нижним индексом «0» обозначены параметры потока в начальный момент времени.

Из (3.33), (3.34), (3.36), (3.37) получаем следующие выражения для приращений скорости и давления в волне

$$w_B - w_{B0} = w_C - w_{C0}; \tag{3.38}$$

$$p_B - p_{B0} = p_C - p_{C0} + \left(\Delta p_д - \Delta p_{д0}\right) + \Delta p_i. \tag{3.39}$$

Сопротивление дросселя найдем, считая течение в нем ламинарным. Тогда

$$\Delta p_д = \frac{32\mu l_0}{d_0^2} w_0; \quad \Delta p_д - \Delta p_{д0} = \frac{32\mu l_0}{d_0^2}\left(w_0 - w_{00}\right)$$

или, переходя в соответствии с уравнениями (3.33) и (3.36) к скорости в сечении C, получим

$$\Delta p_д - \Delta p_{д0} = \frac{32\mu l_0}{d_0^2}\frac{S}{S_0}\left(w_C - w_{C0}\right). \tag{3.40}$$

Инерционный перепад давления также выразим через ускорение в сечении C

$$\Delta p_i = \rho l_0 \frac{S}{S_0}\frac{\mathrm{d}w_C}{\mathrm{d}t}. \tag{3.41}$$

Подставляя (3.40) и (3.41) в (3.39), получим

$$p_B - p_{B0} = p_C - p_{C0} + \frac{32\mu l_0}{d_0^2}\frac{S}{S_0}\left(w_C - w_{C0}\right) + \rho l_0 \frac{S}{S_0}\frac{\mathrm{d}w_C}{\mathrm{d}t}. \tag{3.42}$$

С другой стороны, в соответствии с волновыми уравнениями (1.53) имеем соотношения

$$\begin{gathered} p_B - p_{B0} = F_1 + G_1; \quad p_C - p_{C0} = F_2; \\ w_B - w_{B0} = \frac{F_1 - G_1}{\rho a_1}; \quad w_C - w_{C0} = \frac{F_2}{\rho a_2}. \end{gathered} \tag{3.43}$$

Из уравнений (3.38) и (3.43) при $a_1 \approx a_2$ следует

$$F_1 - G_1 = F_2, \tag{3.44}$$

а из уравнений (3.42) и (3.43), при том же условии $a_1 \approx a_2$, получаем уравнение

$$T\frac{\mathrm{d}F_2}{\mathrm{d}t} + \left(1 + \alpha\right)F_2 = F_1 + G_1, \tag{3.45}$$

где $T = \dfrac{l_0}{a}\dfrac{S}{S_0}$ – постоянная времени дросселя;

$$\alpha = \frac{32\nu}{d_0^2}T \text{ – параметр сопротивления.} \tag{3.46}$$

Будем считать характеристическую функцию прямой волны F_1 известной. Исключая из (3.45) при помощи (3.44) G_1, получим следующее линейное дифференциальное уравнение для определения характеристической функции F_2

$$T\frac{\mathrm{d}F_2}{\mathrm{d}t} + \left(\alpha + 2\right)F_2 = 2F_1, \tag{3.47}$$

решение которого имеет вид

$$F_2 = e^{-(\alpha+2)\frac{t}{T}} \int_0^{\frac{t}{T}} 2F_1 e^{(\alpha+2)\frac{t}{T}} \mathrm{d}\left(\frac{t}{T}\right). \qquad (3.48)$$

В частном случае, когда прямая волна несет скачкообразное повышение давления $F_1 = \Delta p = \mathrm{const}$, то

$$F_2 = \frac{2\Delta p}{\alpha+2} e^{-(\alpha+2)\frac{t}{T}} \left[e^{(\alpha+2)\frac{t}{T}} - 1 \right] = \frac{2\Delta p}{\alpha+2} \left[1 - e^{-(\alpha+2)\frac{t}{T}} \right]. \qquad (3.49)$$

Второе слагаемое в (3.49) характеризует переходный процесс, связанный с прохождением волны через дроссель. В самом начале процесса ($t = 0$) $F_2 = 0$. То есть дроссель полностью отражает волну F_1. Затем, с течением времени, растет величина F_2 до своего стационарного значения

$$F_2\big|_{t\to\infty} = \frac{2\Delta p}{\alpha+2}. \qquad (3.50)$$

Из (3.50) видно, что дроссель ослабляет волну повышения давления и тем более значительно, чем выше параметр сопротивления α.

Общее выражение для волновой характеристики на втором участке ($x \geq x_C$) имеет вид

$$F_2(t,x) = F_2\left(t - \frac{x - x_C}{a}\right) = \frac{2\Delta p}{\alpha+2} \left[1 - e^{-(\alpha+2)\left(\frac{t}{T} - \frac{x - x_C}{aT}\right)} \right]. \qquad (3.51)$$

Локальное (в сечении B) значение характеристики отраженной волны получается из (3.44) и (3.49)

$$G_1 = \frac{\Delta p}{\alpha+2} \left[\alpha + 2e^{-(\alpha+2)\frac{t}{T}} \right], \qquad (3.52)$$

а общее выражение этой характеристической функции на участке $x \leq x_B$

$$G_1(t,x) = G_1\left(t - \frac{x_B - x}{a}\right) = \frac{\Delta p}{\alpha+2} \left[\alpha + 2e^{(\alpha+2)\left(-\frac{t}{T} + \frac{x_B - x}{aT}\right)} \right].$$

Рассмотрим теперь случай прохождения через дроссель прямой волны, несущей гармонические колебания $F_1 = \Delta p \sin \omega t$. В соответствии с (3.48) имеем

$$F_2 = \frac{2\Delta p}{(\alpha+2)^2 + \omega^2 T^2} e^{-(\alpha+2)\frac{t}{T}} \left\{ \left[e^{(\alpha+2)\frac{t}{T}} (\alpha+2) \sin \omega t - \omega T \cos \omega t \right] + \omega T \right\} =$$

$$= \frac{2\Delta p}{(\alpha+2)^2 + \omega^2 T^2} \left\{ \left[(\alpha+2) \sin \omega t - \omega T \cos \omega t \right] + e^{-(\alpha+2)\frac{t}{T}} \omega T \right\} \quad . \qquad (3.53)$$

Преобразуем выражение в квадратных скобках (3.53), используя подстановку

$$\omega T = b \sin \Delta\varphi; \quad \alpha + 2 = b \cos \Delta\varphi,$$

причем

$$b^2 = (\alpha+2)^2 + \omega^2 T^2; \quad \Delta\varphi = -\operatorname{arctg}\frac{\omega T}{\alpha+2}. \tag{3.54}$$

С учетом этого $(\alpha+2)\sin\omega t - \omega T\cos\omega t = b\sin(\omega t + \Delta\varphi)$ и следовательно

$$F_2 = \frac{2\Delta p}{\sqrt{(\alpha+2)^2+\omega^2T^2}}\sin(\omega t+\Delta\varphi) + \frac{2\Delta p\omega T}{(\alpha+2)^2+\omega^2T^2}e^{-(\alpha+2)\frac{t}{T}}, \tag{3.55}$$

где сдвиг фаз $\Delta\varphi$ определяется формулой (3.54).

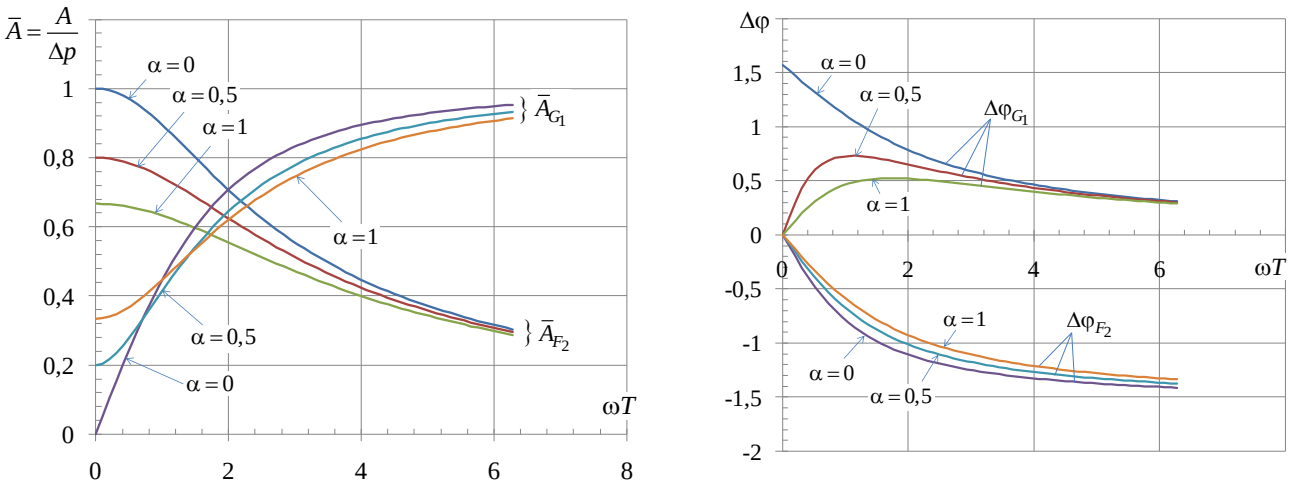
Локальное значение характеристической функции отраженной волны G_1 можно найти с помощью уравнения (3.44) и выражения (3.53)

$$G_1 = \frac{\Delta p}{\sqrt{(\alpha+2)^2+\omega^2T^2}}\left[\sqrt{\alpha^2-\omega^2T^2}\sin(\omega t+\Delta\varphi) - 2\omega T e^{-(\alpha+2)\frac{t}{T}}\right], \tag{3.56}$$

где

$$\Delta\varphi = \operatorname{arctg}\frac{2\omega T}{\alpha(\alpha+2)+\omega^2T^2}. \tag{3.57}$$

Амплитуда, частота и фаза стационарных колебаний в волнах G_1 и F_2 характеризуются первыми слагаемыми в выражениях (3.55), (3.56). На рис. 3.6 показано изменение амплитуды и сдвига фаз в зависимости от частоты.



а) *б*)

Рис. 3.6. Изменение параметров прошедшей и отраженной от дросселя волны:
а – изменение относительной амплитуды стационарных колебаний;
б – сдвиг фазы стационарных колебаний

Видно, что волна проходит дроссель, уменьшая амплитуду и изменяя фазу колебаний ($\Delta\varphi < 0$). Эти изменения растут с увеличением частоты колебаний.

Частичное отражение волны от дросселя также происходит с изменением амплитуды и фазы колебаний. Амплитуда колебаний в отраженной волне при увеличении частоты все больше приближается к амплитуде колебаний в первичной прямой волне. По фазе же колебания в отраженной воле опережают колебания в прямой волне ($\Delta\varphi > 0$). При определенных частотах колебаний, соответствующих

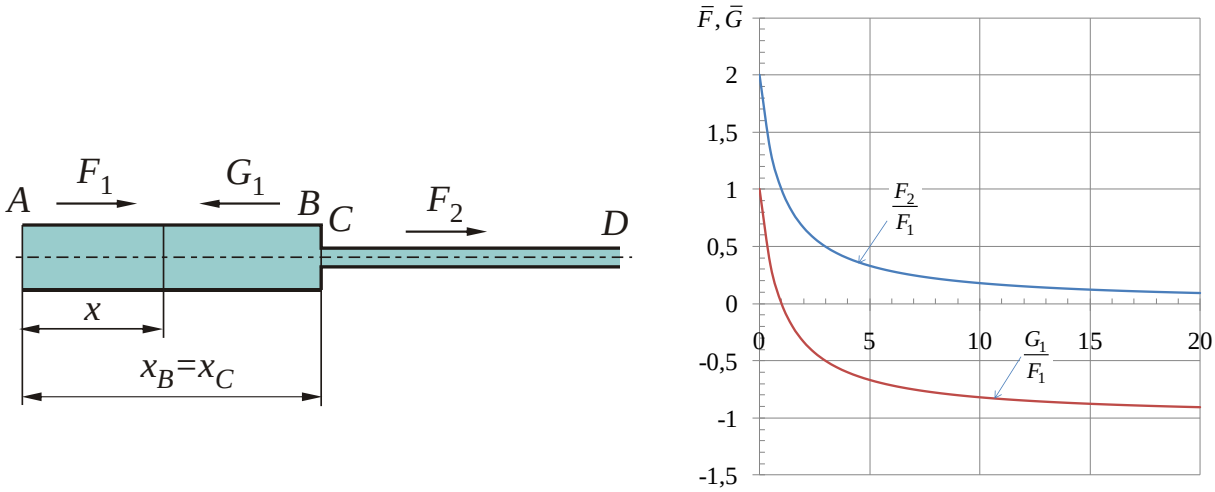
максимуму аргументу функции $\Delta\varphi$ (3.57), то есть при $\omega T = \sqrt{\alpha(\alpha+2)}$ сдвиг фазы достигает наибольшей величины

$$\Delta\varphi_{\max} = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha+2)}}.$$

Сдвиг фаз зависит также и от параметра α, который определяет сопротивление дросселя и находится по формуле (3.46). Как видно из (3.57), с увеличением этого параметра сдвиг фаз уменьшается.

3.2.3. Прохождение волны через стык трубопроводов различного диаметра

Рассмотрим ситуацию, когда волна F_1, бегущая по участку AB (рис. 3.7, *а*) встречается со стыком трубопроводов различного диаметра BC и, изменившись переходит на другой участок CD волной F_2 и частично отражается волной G_1.



а) *б*)

Рис. 3.7. Прохождение волны через стык трубопроводов различного диаметра: *а* – схема стыка и волновых функций; *б* – влияние параметра стыка на интенсивность волн

Соотношения между волновыми функциями F_2, G_1, F_1 определяется физическими условиями течения жидкости через стык:

- равенством расходов в конце первой линии (узел B) и в начале второй (узел C)

$$w_B S_B = w_C S_C; \tag{3.58}$$

- равенством давления в этих узлах*

$$p_B = p_C. \tag{3.59}$$

Начальные параметры (в начале переходного процесса) связаны этими же соотношениями:

$$w_{B0} S_B = w_{C0} S_C; \quad p_{B0} = p_{C0},$$

поэтому

* Потерями давления на местном сопротивлении в данном случае пренебрегаем

$$\left(w_B - w_{B0}\right)S_B = \left(w_C - w_C\right)S_C; \quad p_B - p_{B0} = p_C - p_{C0}. \tag{3.60}$$

В то же время, в соответствии с волновыми уравнениями (1.53) имеем

$$w_B - w_{B0} = \frac{F_1 - G_1}{\rho a_1}; \quad w_C - w_{C0} = \frac{F_2}{\rho a_2}; \quad p_B - p_{B0} = F_1 + G_1; \quad p_C - p_{C0} = F_2, \tag{3.61}$$

для волн на участках 1 и 2 трубопровода соответственно.

Исключая из (3.60) и (3.61) скорости и давления, получим уравнения, связывающие локальные значения волновых характеристик

$$F_1 + G_1 = F_2; \quad F_1 - G_1 = \beta_+ F_2, \tag{3.62}$$

где β_+ – параметр стыка для волн, бегущих вдоль оси x

$$\beta_+ = \frac{S_2}{S_1}\frac{a_1}{a_2}. \tag{3.63}$$

Естественно, для волн, бегущих против оси x, выражение параметра стыка будет другим

$$\beta_- = \frac{S_1}{S_2}\frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{\beta_+}. \tag{3.64}$$

В уравнениях (3.62) характеристическая функция первичной волны F_1, следовательно, ее локальное значение в узле B предполагается известным. Остальные характеристики выражаются через неё. Сложение и вычитание уравнений (3.62) после преобразований дает

$$F_2 = \frac{2}{1+\beta_+}F_1; \quad G_1 = \frac{1-\beta_+}{1+\beta_+}F_1. \tag{3.65}$$

На рис. 3.7, *б* показано влияние параметра стыка β_+, зависящего, главным образом от отношения площадей поперечного сечения трубопроводов, на соотношение локальных значений волновых функций. Рассмотрим предельные случаи.

1. Стык трубопровода с большим резервуаром, то есть $\beta_+ \to \infty$ $\left(S_2 >> S_1\right)$. В этом случае $F_2 = 0;\ G_1 = -F_1$, то есть волна полностью отражается от резервуара с изменением знака волновой функции. Если волна F_1 несет гармонические колебания, то в отраженной волне изменяется фаза колебаний на π радиан.

2. Глухой конец трубопровода, то есть $S_2 = 0$ и $\beta_+ = 0$. В этом случае $G_1 = F_1$ $F_2 = 0$ так как нет второго трубопровода. Если же имеется второй трубопровод, но он имеет очень малый диаметр, то есть $S_2 << S_1,\ \beta_+ \to 0$, тогда

$$G_1 \to F_1; \quad F_2 \to 2F_1,$$

То есть на втором участке появляется волна, и она в два раза сильнее (по давлению) первичной волны.

3. Стык трубопроводов одинакового диаметра. В этом случае $S_1 = S_2, a_1 = a_2$ и $\beta_+ = 1$. Тогда $G_1 = 0, F_2 = F_1$, то есть волна проходит стык не изменяясь и не отражаясь.

При промежуточном значении параметра стыка наблюдаются следующие закономерности

1. Волна, переходя на следующий участок, усиливается $(F_2 > F_1)$, если диаметр трубопровода уменьшается $(\beta_+ < 1)$ и ослабляется, если диаметр трубопровода увеличивается $(\beta_+ > 1)$.

2. Стык трубопроводов разного диаметра отражает волны с изменением знака волновой функции, если за стыком труба большего диаметра, и с сохранением знака, если за стыком труба меньшего диаметра.

На рис. 3.8 показано изменение давлений и скоростей вдоль потока, вызванные гармонической волной колебания давления $F_1 = \Delta p \sin \omega t$ после её встречи со стыком, когда фронт отраженной волны G_1 достиг сечения с координатой x. При этом общее выражение характеристических функций вторичных волн, следующие из их локальных значений, имеют вид

$$G_1 = \frac{1-\beta_+}{1+\beta_+} \Delta p \sin \omega \left(t - \frac{x_B - x}{a} \right) \quad \text{при} \quad x \le x_B,$$

$$F_2 = \frac{2}{1+\beta_+} \Delta p \sin \omega \left(t - \frac{x - x_C}{a} \right) \quad \text{при} \quad x \ge x_C,$$

причем $x_B \approx x_C$.

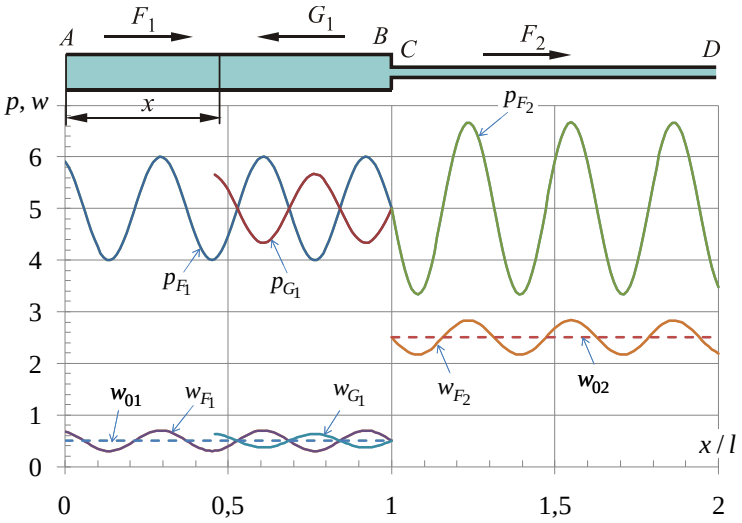


Рис. 3.8. Прохождение гармонической волны через стык трубопроводов различного диаметра $\beta_+ = 0,2;\ \omega = 2 \cdot 10^4$ 1/с

3.3. Стоячие волны

Интересное явление порождается интерференцией прямой и отраженной волн, несущих колебания давления и скорости. При определенных условиях образуются стоячие волны.

Рассмотрим гидролинию с установленным дросселем. Пусть волна, бегущая к дросселю, характеризуется функцией

$$F_1 = \Delta p \sin \omega \left(t + \frac{l - x}{a} \right).$$

В момент времени $t = 0$ она достигает дросселя и отразится от него волной G_1. Общее выражение для ее волновой функции можно воспроизвести по локальному значению в месте установки дросселя

$$G_1(t,x) = G_1\left(t = t - \frac{l-x}{a}, x = l\right) \quad \text{при} \quad t \geq \frac{l-x}{a}.$$

Если размеры дросселя малы $(S_0 << S,\ l_0 \approx 0)$, а $\omega T >> 2$, то параметр сопротивления $\alpha = 0$ и сдвиг фазы $\Delta\varphi = 0$. При этом псевдостационарная составляющая волновой функции, в соответствии с (3.56)

$$G_1 = \Delta p \sin\omega\left(t - \frac{l-x}{a}\right).$$

Сложив стационарные составляющие волновых функций для прямой и отраженной волны, получим результирующее изменение давления

$$\Delta p_\Sigma = F_1 + G_1 = \Delta p\left[\sin\omega\left(t + \frac{l-x}{a}\right) + \sin\omega\left(t - \frac{l-x}{a}\right)\right] =$$

$$= 2\Delta p \cos\omega\frac{l-x}{a}\sin\omega t.$$

Полученное выражение свидетельствует о появлении стоячей волны. Группа первых сомножителей $2\Delta p\cos\omega(l-x)/a$ характеризует амплитуду колебаний давления в стоячей волне, зависящую от расположения сечения потока. Последний сомножитель $\sin\omega t$ – изменение по времени суммарного перепада давлений в каждом сечении трубопровода. В определенных сечениях, где $\cos\omega(l-x)/a = 0$, амплитуда колебаний давления равна нулю. Такие места называются узлами стоячей волны. Их уравнение

$$\omega\frac{l - x_{\text{уз}}}{a} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{или} \quad \frac{x_{\text{уз}}}{l} = 1 - \frac{\pi a}{\omega l}\left(\frac{1}{2} + k\right), \quad k = 0,1,2... - \text{целые числа}.$$

Длина стоячей волны находится по формуле $L = 2\pi a/\omega$. Тогда, например, при $L = l$ узлы располагаются в сечениях с относительной координатой, рис. 3.9

$$\frac{x_{\text{уз}}}{l} = \frac{3}{4};\ \frac{1}{4}.$$

Пучности стоячей волны – места с наибольшим колебанием давления, где имеет место $\cos\omega\left(\frac{l-x}{a}\right) = 1$, описываются уравнением $\omega\frac{l - x_{\text{п}}}{a} = k\pi$ или $\frac{x_{\text{п}}}{l} = 1 - \frac{\pi a}{\omega l}k$.

При $L = l$ $\frac{x_{\text{п}}}{l} = 1;\ \frac{1}{2};\ 0$. Таким образом, давление перед дросселем ($x = l$) пульсирует с удвоенной амплитудой:

$$\Delta p_\Sigma(x - l) = 2\Delta p \sin\omega t,$$

увеличивая, тем самым и скорость истечения жидкости через отверстие дросселя. Этот эффект может найти применение в технических устройствах.

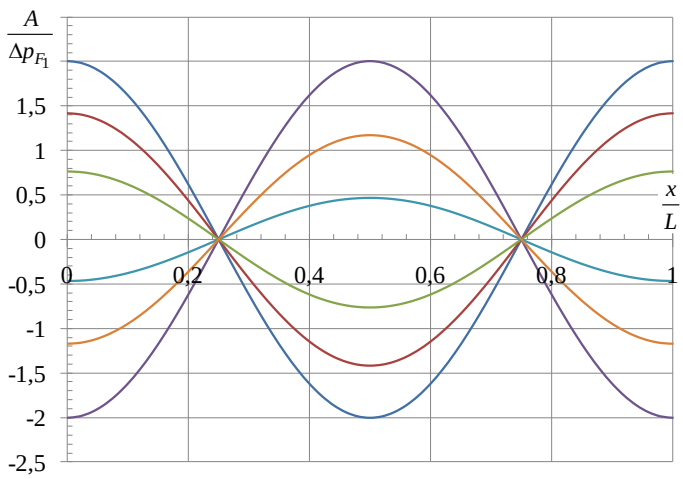


Рис. 3.9. Распределение давления по длине трубопровода в различные моменты времени в стоячей волне дросселем

3.4. Гидравлический удар

Гидравлический удар – это резкое повышение или понижение давления в гидросистеме при волновых процессах. Данное явление обусловлено инерционностью и упругостью жидкости. Оно всегда сопровождает волновые процессы, являясь их свойством. Изменение давление в каждом отдельном случае может быть большим и малым и, соответственно, удар сильным и слабым.

Оценим силу удара, вызванного только прямыми волнами (такой удар называется прямым). На рис. 3.10 показана гидросистема, включающая два резервуара, две линии трубопровода и регулирующее устройство (клапан).

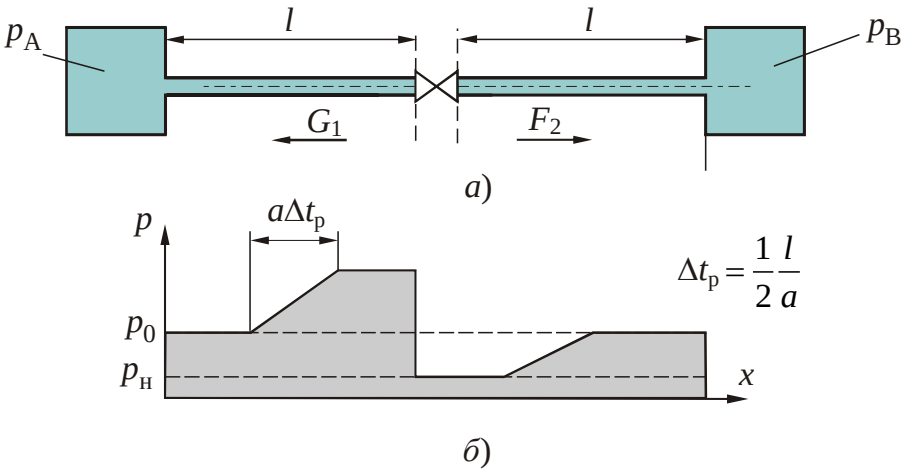


Рис. 3.10. Возникновение гидроудара при перемещении затвора клапана

Пусть изменилось открытие клапана и появились волны F_2 и G_1. В соответствии с волновыми уравнениями (1.54) изменения давления и скорости будут следующими:

- на участке 1 (выше клапана по направлению течения)

$$p - p_0 = G_1; \quad w - w_0 = -\frac{G_1}{\rho a};$$

- на участке 2 (ниже клапана по направлению течения)

$$p - p_0 = F_2; \quad w - w_0 = \frac{F_2}{\rho a}.$$

Исключив из этих соотношений волновые функции, получим связь между изменениями давления и скорости

$$p - p_0 = \pm \rho a \left(w - w_0 \right). \tag{3.66}$$

Формула (3.66) была впервые предложена Н.Е. Жуковским. В ней знак минус относится к потоку перед источником удара (в нашем случае перед клапаном), знак плюс – к потоку за источником удара. Формула показывает, что торможение потока $\left(w < w_0 \right)$ вызывает повышение давления перед клапаном и падение давления за ним, а ускорение потока $\left(w > w_0 \right)$, наоборот – понижение давления перед ним и повышение за ним.

Оценим изменение давления при ударе. Пусть избыточное давление в напорном резервуаре (см. рис. 3.10) $p_{\text{А}} = 0{,}1\,\text{Мпа}$, а в конце трубопровода $p_{\text{В}} = 0$. Плотность жидкости $\rho = 1000\,\text{кг/м}^3$; скорость звука $a = 1200\,\text{м/с}$. Скорость течения жидкости при открытом клапане и коэффициенте его сопротивления $\xi = 15$

$$w_0 = \sqrt{\frac{2\left(p_{\text{А}} - p_{\text{В}} \right)}{\rho\left(1 + \xi\right)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^5}{10^3\left(1 + 15\right)}} = 3{,}54\,\text{м/с}.$$

Наибольшее ударное изменение давления в трубопроводе после полного закрытия клапана $\left(w = 0 \right)$ без учета отраженных волн, то есть при прямом ударе, находим по формуле Жуковского

$$p_{\text{В}} - p_0 = -1000 \cdot 1200\left(0 - 3{,}54\right) = 4{,}25 \cdot 10^6\ \text{Па} = 4{,}25\ \text{МПа}$$

$$p_{\text{С}} - p_0 = 1000 \cdot 1200\left(0 - 3{,}54\right) = -4{,}25 \cdot 10^6\ \text{Па} = -4{,}25\ \text{МПа}$$

Следовательно, перед клапаном избыточное давление увеличивается в 42,5 раза по сравнению с максимальным статическим давлением в данной системе, а за клапаном должно упасть ниже абсолютного нуля, что физически невозможно. При снижении давления до критической величины, которая определяется давлением насыщенных паров жидкости при данной температуре и парциальным давлением содержащихся в жидкости газов, произойдет нарушение сплошности жидкости. В ее массе образуется каверна, заполненная парами жидкости и газами, ранее содержащимися в ней. При отсутствии газов давление в каверне равно давлению насыщенных паров $p_{\text{н}}$ и снижение давления ниже этой величины невозможно. Это явление называется кавитацией. Устранить кавитацию можно, подняв давление в системе.

Рассмотренный пример показывает, что изменение давления в волновых процессах может превосходить в десятки раз статическое давление системы. Поэтому сильный гидравлический удар может быть причиной аварий и требует принятия специальных мер защиты.

Наиболее распространенным средством защиты системы от гидравлического удара является предохранительный клапан, рис. 3.11, *а*, пружина которого удер-

живает заслонку в закрытом положении пока давление перед клапана меньше допустимого. Если давление становится выше допустимого, сила давления сжимает пружину, заслонка клапана перемещается и открывает окна, через которые сливается рабочая жидкость. При этом давление в системе понижается.

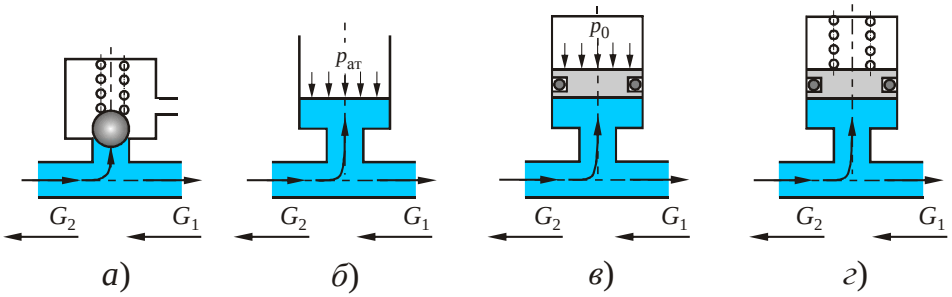


Рис. 3.11. Конструктивные схемы устройств для защиты от гидроудара

Выше в п. 3.2 было показано, что волна отражается от емкости, частично или полностью компенсируя прямую волну. Поэтому установленная недалеко от источника удара такая емкость может служить защитным элементом. Такая емкость при сравнительно низком давлении в гидросистеме может быть открытой в атмосферу (см. рис. 3.11), при умеренном и высоком давлении – закрытой с воздушной подушкой или с поршнем и пружиной.

На рис. 3.12 приведено влияние продолжительности закрытия заслонки клапана на максимальное повышение давления перед ним.

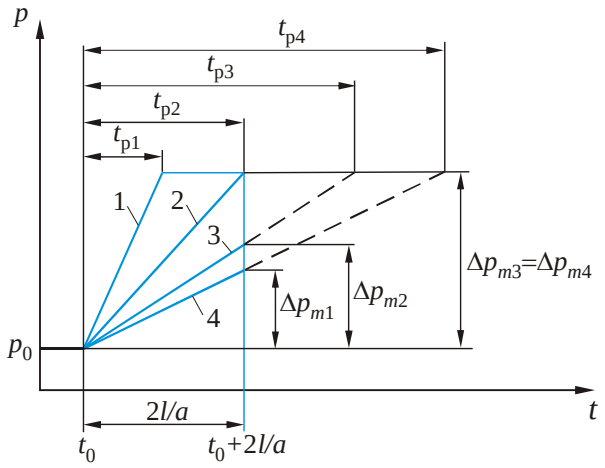


Рис. 3.12. Влияние продолжительности закрытия клапана на давление гидроудара

В очень длинном трубопроводе ($l \to \infty$) отраженных волн нет, поэтому максимальное повышение давления связано только с прямой волной. Оно определяется формулой Жуковского

$$|\Delta p_{\max}| = \rho a |\Delta w|$$

и не зависит от времени перемещения заслонки клапана.

В трубопроводе ограниченной длины появляются отраженные волны, способны повлиять на максимальное ударное давление. Они могут усиливать изменение давления от прямой волны, если отражение происходит с сохранением знака вол-

новой функции (например, отражение от прикрытого клапана, дросселя и т, п.), а также компенсировать или ослаблять изменение давления от прямой волны, если отражение происходит с изменением знака волновой функции (например, отражение от резервуара, открытого конца трубопровода и т. п.).

В гидросистеме, показанной на рис. 3.10, обе отраженные волны (от резервуара и от клапана) вызывают обратное изменение давления, нежели прямая волна.

При линейном законе нарастания давления в первичной прямой волне (см. рис. 3.12) обе отраженные волны могут с избытком компенсировать дальнейшее повышение давления в прямой волне, если заслонка продолжает закрываться после прихода к клапану отраженной от резервуара волны. Вот почему наибольшее повышение давления перед клапаном будет реализовано в момент прихода отраженной волны, то есть через отрезок времени $2l / a$ после начала перемещения заслонки (см. прямые 3 и 4 на рис. 3.12). На этом же графике видно, что ударное повышение давления будет тем меньше, чем больше время перемещения заслонки $\Delta t_з$.

Если же регулирование клапаном заканчивается до прихода первой отраженной волны $\left(\Delta t_з < 2l / a\right)$, то возникает прямой удар, при котором максимальное повышение давления не зависит от времени регулирования $\Delta t_з$, см. линии 1 и 2 на рис. 3.12.

Гидравлический удар, при котором максимальное изменение давления определяется не только прямой, но и отраженными волнами, называется непрямой удар. Такой удар наблюдается при $\left(\Delta t_з > 2l / a\right)$. При непрямом ударе время регулирования $\Delta t_з$ влияет на максимальное повышение давления в системе.

Отраженные волны могут не только ослаблять, как в предыдущем примере, но и усиливать изменение давления в прямой волне.

Гидравлический удар, как свойство волновых процессов, находит техническое применение. На рис. 3.13 показана принципиальная схема динамического мультипликатора давления (гидравлического тарана).

Ударный клапан 1 отпадает под действием собственного веса и открывает отверстие, через которое начинает вытекать жидкость. Скорость жидкости постепенно увеличивается, а вместе с ней растет и сила динамического давления на ударный клапан. Как только эта сила становится больше веса клапана, клапан закрывается. Возникает гидравлический удар. Под действием высокого давления открывается напорный клапан 2 и жидкость вытесняется в напорный трубопровод (эта фаза процесса показана на рис. 3.13). Истечение жидкости сопровождается падением давления в ударной камере, что приводит к закрытию напорного клапана и открытию ударного клапана, после чего процесс повторяется. Таким образом, динамический мультипликатор давления работает циклически, обеспечивая прерывистую подачу высоконапорной жидкости в напорный трубопровод. При этом сбрасывается в холостую некоторое количество низконапорной жидкости. Мультипликатор может повышать давление в десятки раз, однако, чем выше давление, тем ниже его КПД.

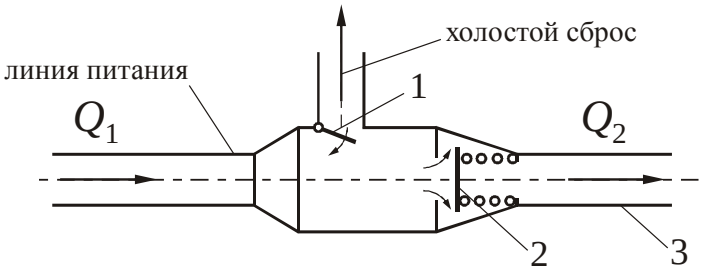


Рис. 3.13. Конструктивная схема мультипликатора давления, использующего принцип гидроудара

Мультипликатор можно использовать и для получения высокоскоростных прерывистых струй, которые находят применение в горном деле и в гидромеханизации. В этом случае вместо напорного трубопровода должно быть установлено сопло.

3.5. Характеристики элементов гидросистем

Характеристики элементов выражают зависимость разности напоров (или давлений) на входе в элемент от расхода жидкости $\Delta H(Q), \Delta p(Q)$ или в безразмерной форме $\Delta h(q)$.

3.5.1. Характеристики источников питания

Большой резервуар, рис. 3.14.

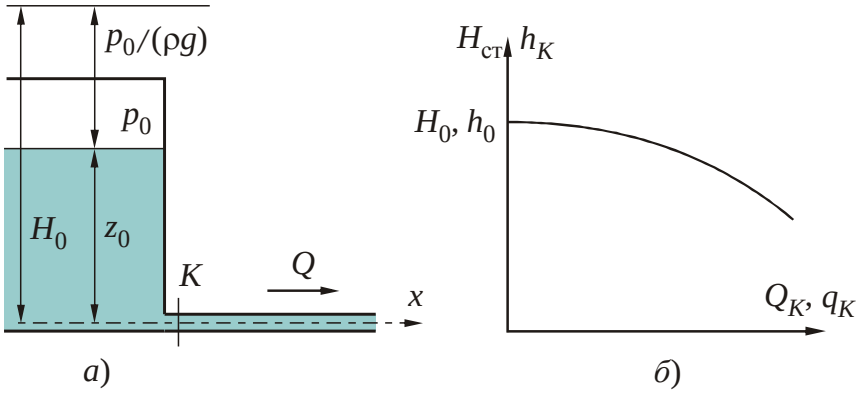


Рис. 3.14. Резервуар питания: *а* – конструктивная схема; *б* – характеристика

Уравнение характеристики резервуара получим, применив уравнение Бернулли к сечению K трубопровода на выходе из резервуара

$$H_{ст} = H_0 - (\alpha + \xi)\frac{Q_K^2}{2gS^2}, \tag{3.67}$$

где $H_{ст}$ – статический напор в сечении K трубопровода; Q_K – расход в сечении K; α – коэффициент Кориолиса; ξ – коэффициент потерь давления на входе в трубопровод.

Разделив уравнение (3.67) на $\Delta H_0 = aQ_0 / gS$ *, получим безразмерную форму характеристического уравнения резервуара питания

$$h_K = h_0 - Bq_K^2, \tag{3.68}$$

где $h_0 = H_0 / \Delta H_0$ – относительный напор в резервуаре; $B = \dfrac{\alpha + \xi}{2aS} Q_0$ – характеристический параметр узла *K* трубопровода. В последнем выражении Q_0 – характерный расход в гидросистеме, принимаемый в качестве масштабного множителя при определении относительных переменных.

При обратном течении жидкости из трубопровода в резервуар

$$H_{\text{ст}} = H_0 \quad \text{или} \quad h_K = h_0. \tag{3.69}$$

Вид характеристики резервуара показан на рис. 3.14, *б*.

Насос. Характеристики серийных насосов, выражающих зависимость разности напоров на выходе и входе $\Delta H_{\text{н}} = H_{k+1} - H_k$ от расхода жидкости *Q*, приводятся в технической документации на насос. Типичная форма характеристик для лопастного и объемного насоса приведена на рис 3.15.

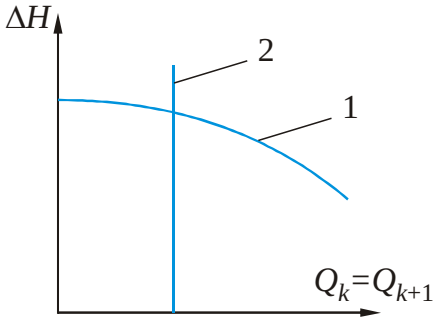


Рис. 3.15. Характеристики насосов: 1 – лопастной насос; 2 – объемный насос

Характеристики насосов стационарны при постоянной частоте вращения вала рабочего колеса или ротора объемного насоса.

Аккумулятор давления пружинный. Схема аккумулятора приведена на рис. 3.16.

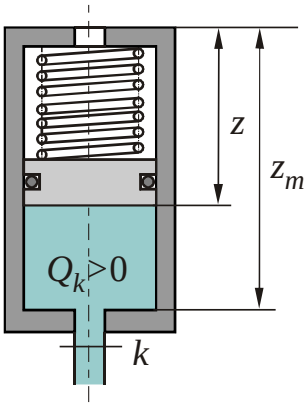


Рис. 3.16. Аккумулятор питания

* Следует из формулы Жуковского

Отток жидкости из аккумулятора, обусловленный перемещением поршня под действием сжатой пружины может быть определен по уравнению

$$Q_k = S_{\text{п}} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{S_{\text{п}}^2}{l} \frac{\mathrm{d}p_k}{\mathrm{d}t}, \tag{3.70}$$

так как $\left(p_k - p_m\right) S_{\text{п}} \approx c\left(z_m - z\right)$.

Здесь $S_{\text{п}}$ – площадь поршня; c – жесткость пружины; z, z_m – степень сжатия пружины и начальное поджатие пружины соответственно; p_k, p_m – текущее давление в сечении k и давление, соответствующее начальному поджатию пружины соответственно.

Из (3.70) следует размерное и безразмерное уравнение характеристики аккумулятора

$$\frac{\mathrm{d}p_k}{\mathrm{d}t} = -\frac{c}{S} Q_k; \quad \frac{\mathrm{d}h_k}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{clS}{\rho a^2 S_{\text{п}}^2} q_k, \tag{3.71}$$

где l, S – длина и площадь сечения соединительного трубопровода, $\tau = ta / l$ – относительное время.

Из (3.71) видно, что характеристика аккумулятора является нестационарной, изменяющейся с течением времени. Запишем характеристику в конечных разностях для ее использования при решении задач расчета нестационарных процессов на ЭВМ. Рассмотрим два узла временной сетки i и $i + 1$, соответствующие моментам времени τ^i и τ^{i+1}. Аппроксимируем производную по времени конечной разностью

$$\frac{\mathrm{d}h_k}{\mathrm{d}\tau} \approx \frac{h_k^{i+1} - h_k^i}{\tau^{i+1} - \tau^i} = \frac{h_k^{i+1} - h_k^i}{\Delta\tau},$$

где $\Delta\tau = \tau^{i+1} - \tau^i$ * – временной шаг между соседними узлами сетки. Тогда, считая расход на интервале интегрирования $\Delta\tau$ постоянным и равным его среднеарифметическому значению, получим

$$h_k^i - h_k^{i+1} = B\left(q_k^i + q_k^{i+1}\right)\Delta\tau, \tag{3.72}$$

где $B = \dfrac{clS}{2\rho a^2 S_{\text{п}}^2}$ – параметр узла системы с пружинным аккумулятором.

3.5.2. Характеристики гидродвигателей

Двухштоковый гидроцилиндр. Схема двухштокового гидроцилиндра приведена на рис. 3.17.

---

* Здесь и далее верхний индекс означает номер временного слоя при численном интегрировании уравнений. Значение индекса $i + 1$ означает, что мы ищем параметры гидросистемы в момент времени $t + \Delta\tau$ (на следующем временном слое $i + 1$) по известным параметрам на момент времени t, соответствующем текущему временному слою i.

Подвижный нагруженный поршень гидроцилиндра представляет собой инерционный элемент. Уравнение его движения при постоянной внешней нагрузке R можно записать в виде

$$m_{\text{п}} \frac{\mathrm{d}v_{\text{п}}}{\mathrm{d}t} = \Delta p_{\text{ц}} S_{\text{п}} - k_{\text{тр}} v_{\text{п}} - R, \tag{3.73}$$

где $m_{\text{п}}$ – приведенная масса поршня; $v_{\text{п}}$, $S_{\text{п}}$ – скорость и рабочая площадь поршня; $\Delta p_{\text{ц}} = p_{k1} - p_{k2}$ – перепад давлений на поршне; $k_{\text{тр}}$ – коэффициент трения.

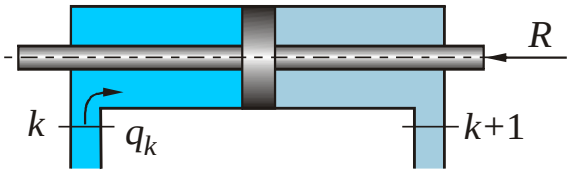


Рис. 3.17. Двухштоковый гидроцилиндр

При достаточно длинных соединительных гидролиниях сжимаемостью жидкости в полостях гидроцилиндра можно пренебречь. При этом $Q_{k1} \simeq Q_{k2} \simeq v_{\text{п}} S_{\text{п}}$. Следовательно

$$Q_{k+1} = Q_k; \quad \frac{\mathrm{d}Q_k}{\mathrm{d}t} = \frac{S_{\text{п}}^2}{m_{\text{п}}} \left(\Delta p_{\text{ц}} - k_{\text{тр}} \frac{Q_k}{S_{\text{п}}^2} - \frac{R}{S_{\text{п}}} \right) \tag{3.74}$$

или в безразмерной форме

$$q_{k+1} = q_k; \quad \frac{\mathrm{d}q_k}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\rho l S_{\text{п}}^2}{m_{\text{п}} S} \left(\Delta h_{\text{ц}} - \bar{k}_{\text{тр}} q_{\text{k}} - \bar{R} \right), \tag{3.75}$$

где $\bar{R} = R / \left(\rho g \Delta H_0 S_{\text{п}} \right)$ – относительная статическая нагрузка гидроцилиндра; $\Delta h_{\text{ц}} = \Delta p_{\text{ц}} / \left(\rho g \Delta H_0 \right)$ – относительный перепад давления на входе и выходе гидроцилиндра (относительный перепад давлений на поршне); $\bar{k}_{\text{тр}} = k_{\text{тр}} S / \left(S_{\text{п}}^2 \rho a \right)$ – относительный коэффициент трения; $\Delta H_0 = a Q_0 / \left(g S \right)$.

Как видим характеристика двухштокового гидроцилиндра нестационарная. Представим ее в конечных разностях так же, как это было сделано для характеристики пружинного аккумулятора, приняв правую часть (3.75) на временном шаге постоянной и равной её среднеарифметическому значению:

$$q_k^{i+1} - q_k^i = B \left[\left(\Delta h_{\text{ц}} - \bar{k}_{\text{тр}} q_k - \bar{R} \right)^{i+1} + \left(\Delta h_{\text{ц}} - \bar{k}_{\text{тр}} q_k - \bar{R} \right)^i \right] \Delta\tau, \tag{3.76}$$

где $B = \rho l S_{\text{п}}^2 / \left(2 m_{\text{п}} S \right)$ – безразмерный параметр гидроцилиндра, который можно представить и несколько иначе

$$B = \frac{\rho l S}{2 m_{\text{п}}} \left(\frac{S_{\text{п}}}{S} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{m_{\text{ж}}}{m_{\text{п}}} \left(\frac{S_{\text{п}}}{S} \right)^2.$$

Из последнего выражения понятно, что параметр гидроцилиндра B характеризует отношение масс жидкости $m_{\text{ж}}$ в соединительных линиях длиной l и приведенной массы поршня $m_{\text{п}}$, а также соотношение площадей поршня $S_{\text{п}}$ и поперечного сечения трубопровода S.

Одноштоковый гидроцилиндр. Пусть поршень имеет разные с обеих сторон площади и установлен в цилиндре с двухсторонним питанием, рис. 3.18.

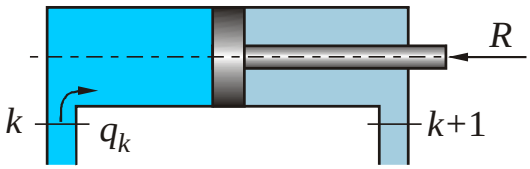


Рис. 3.18. Одноштоковый гидроцилиндр

Уравнение его движения при тех же допущениях, что и для двухштокового гидроцилиндра имеет вид

$$m_{\text{п}} \frac{\mathrm{d}v_{\text{п}}}{\mathrm{d}t} = p_k S_{\text{п}} - p_{k+1}\left(S_{\text{п}} - S_{\text{шт}}\right) - R, \tag{3.77}$$

$S_{\text{п}}$ и $S_{\text{шт}}$ – площадь сечения поршня и штока соответственно.

Баланс расходов для данного гидроцилиндра запишется в виде

$$Q_k = Q_{k+1} \frac{S_{\text{п}}}{S_{\text{п}} - S_{\text{шт}}}. \tag{3.78}$$

Так как $v_{\text{п}} = Q_k / S_{\text{п}}$, то уравнение (3.77) можно представить в виде

$$\frac{\mathrm{d}Q_k}{\mathrm{d}t} = \frac{S_{\text{п}}^2}{m_{\text{п}}}\left(p_k - p_{k+1} \frac{S_{\text{п}} - S_{\text{шт}}}{S_{\text{п}}} - \frac{R}{S_{\text{п}}} \right). \tag{3.79}$$

В относительных переменных уравнение (3.79) может быть представлено следующим образом

$$q_k = q_{k+1}^*; \quad \frac{\mathrm{d}q_k}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\rho l S_{\text{п}}^2}{m_{\text{п}} S_{\text{п}}}\left(\Delta h_{\text{ц}}^* - R^*\right), \tag{3.80}$$

где

$$q_{k+1}^* = \frac{Q_{k+1}^*}{Q_0} = \frac{Q_{k+1}}{Q_0} \frac{S_{\text{п}}}{S_{\text{п}} - S_{\text{шт}}}; \quad \Delta h_{\text{ц}}^* = \frac{p_k - p_{k+1}^*}{\rho g \Delta H_0}; \quad R^* = \frac{R}{\rho g \Delta H_0 S_{\text{п}}};$$

$$\Delta H_0 = \frac{a Q_0}{qS}; \quad p_{k+1}^* = p_{k+1} \frac{S_{\text{п}} - S_{\text{шт}}}{S_{\text{п}}}; \quad \Delta p_{\text{ц}}^* = p_k - p_{k+1}^*.$$

Как видим по форме полученное уравнение совпадает характеристическим уравнением двухштокового гидроцилиндра. В конечно-разностной форме уравнение характеристики одноштокового гидроцилиндра также подобно уравнению (3.76)

$$q_k^{i+1} - q_k^i = B\left[\left(\Delta h_{\text{ц}}^* - R^*\right)^{i+1} + \left(\Delta h_{\text{ц}}^* - R^*\right)^i\right]\Delta\tau, \tag{3.81}$$

где $B = \rho l S_{\text{п}}^2 / \left(2 m_{\text{п}} S\right)$ – характеристический параметр гидроцилиндра.

Плунжерный гидроцилиндр. Схема плунжерного гидроцилиндра показана на рис. 3.19.

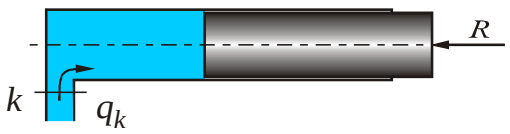


Рис. 3.19. Плунжерный гидроцилиндр

Он имеет односторонний совмещенный подвод и отвод рабочей жидкости. Результаты, полученные для двухштокового гидроцилиндра, пригодны и для плунжерного, если положить

$$\Delta p_{\text{ц}} = p_k; \quad \Delta h_{\text{ц}} = h_k .$$

Тогда

$$q_k^{i+1} - q_k^i = B\left[\left(\Delta h_k - R^*\right)^{i+1} + \left(\Delta h_k - R^*\right)^i\right]\Delta\tau, \tag{3.82}$$

где $B = \dfrac{\rho l S_{\text{п}}^2}{2 m_{\text{п}} S}$ – характеристический параметр гидроцилиндра; $R^* = \dfrac{R}{\rho g \Delta H_0 S_{\text{п}}}$ – относительная нагрузка.

Гидромотор. Схема пластинчатого гидромотора приведена на рис. 3.20.

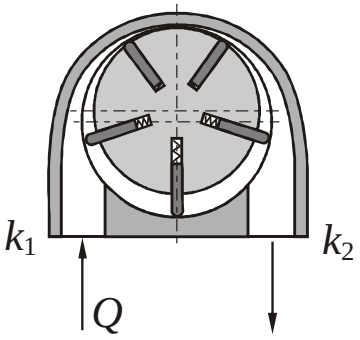


Рис. 3.20. Пластинчатый гидромотор

Частота вращения ротора определяется расходом рабочей жидкости Q и рабочим объемом гидромотора V.

$$\omega = 2\pi Q / V . \tag{3.83}$$

Если пренебречь утечками и сжимаемостью жидкости в полости гидромотора, то расходы на входе (сечение $k1$) и выходе (сечение $k2$) можно считать одинаковыми

$$Q_{k1} \simeq Q_{k2} = Q \text{ или в относительных переменных } q_{k1} \simeq q_{k2} = q . \tag{3.84}$$

Момент внешней нагрузки обозначим M. Момент сил давления жидкости (вращающий момент) определится, как $Q\left(p_{k1} - p_{k2}\right)/\omega = Q\Delta p/\omega$. Тогда уравнение движения ротора гидромотора запишется следующим образом

$$J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{Q\Delta p}{\omega} - M , \tag{3.85}$$

где J – момент инерции ротора и связанных с ним частей.

Подставив (3.83) и (3.84) в (3.85), получим

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{J}\left(\frac{V}{2\pi}\right)^2\left(\Delta p-\frac{2\pi}{V}M\right) \tag{3.86}$$

или в относительном виде

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\tau}=\frac{\rho l}{JS}\left(\frac{V}{2\pi}\right)^2\left(\Delta h-\frac{2\pi S}{\rho g\Delta H_0 V}M\right) \tag{3.87}$$

и в конечно-разностном виде

$$q^{i+1}-q^i=B\left[\left(\Delta h-M^*\right)^{i+1}+\left(\Delta h-M^*\right)^i\right]\Delta\tau, \tag{3.88}$$

где $B=\frac{\rho l}{2JS}\left(\frac{V}{2\pi}\right)^2$ – параметр гидромотора; $M^*=\frac{2\pi M}{\rho\Delta H_0 V}$ – относительный момент статической нагрузки.

3.5.3. Характеристики регулирующей и распределительной аппаратуры

Клапан. Рассмотрим регулирующий клапан, установленный на трубопроводе (в общем случае переменного поперечного сечения), рис. 3.21.

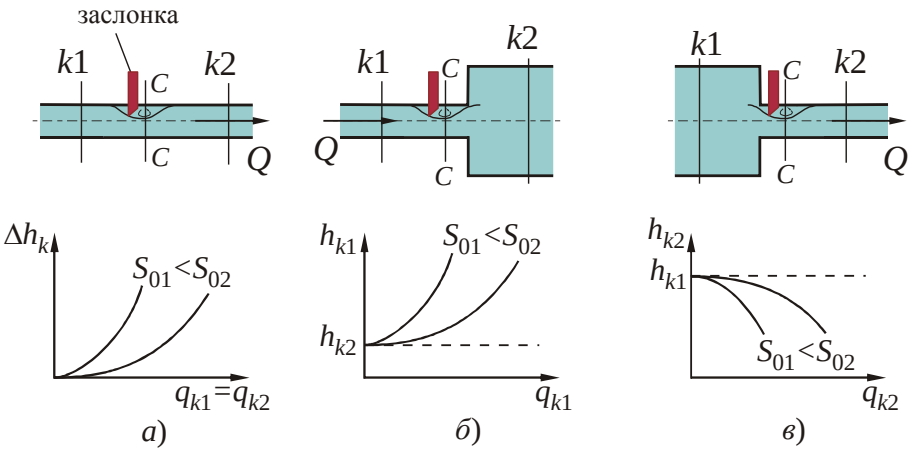


Рис. 3.21. К определению характеристики клапана

В соответствии с уравнением Бернулли, составленным для сечений $k1$ и $k2$:

$$p_{k1}-p_{k2}=\rho\frac{w_{k2}^2}{2}-\rho\frac{w_{k1}^2}{2}+\Delta p_{\text{п}}.$$

Потери напора $\Delta p_{\text{п}}$ складываются из потерь при сжатии потока на участке $k1$C и потерь при его последующим расширении на участке C$k2$:

$$\Delta p_{\text{п}}=\xi_C\rho\frac{w_C^2}{2}+\rho\frac{\left(w_C-w_{k2}\right)^2}{2},$$

поэтому

$$p_{k1}-p_{k2}=\rho\frac{w_{k2}^2}{2}-\rho\frac{w_{k1}^2}{2}+\xi_C\rho\frac{w_C^2}{2}+\rho\frac{\left(w_C-w_{k2}\right)^2}{2}, \tag{3.89}$$

где ξ_C – коэффициент сопротивления при обтекании кромки заслонки клапана, который в первом приближении может быть принят равным $\xi_C = 0{,}1$; w_C – скорость течения в сжатом сечении C, определяемая формулой

$$w_C = w_{k1}\frac{S_{k1}}{\varepsilon S_0} = w_{k2}\frac{S_{k2}}{\varepsilon S_0},$$

где S_0 – площадь отверстия затвора клапана; $\varepsilon = S_C/S_0$ – коэффициент сжатия потока, который можно определить по формуле

$$\varepsilon = 0{,}62 + 0{,}58\frac{S_0}{S}, \tag{3.90}$$

где S – площадь поперечного сечения соединительных трубопроводов.

Выражение (3.89) можно записать в более компактном виде

$$p_{k1} - p_{k2} = \rho\frac{Q^2}{2S}\xi_{\text{кл}}, \tag{3.91}$$

где $\xi_{\text{кл}}$ – коэффициент сопротивления клапана

$$\xi_{\text{кл}} = \left(\frac{S}{S_{k2}}\right)^2 - \left(\frac{S}{S_{k1}}\right)^2 + \xi_{\text{C}}\left(\frac{S}{\varepsilon S_0}\right)^2 + \left(\frac{S}{\varepsilon S_0} - \frac{S}{S_{k2}}\right)^2. \tag{3.92}$$

Если перед клапаном и за ним одинаковые трубопроводы $\left(S_{k1} = S_{k2} = S\right)$, то

$$\xi_{\text{кл}} = \xi_{\text{C}}\left(\frac{S}{\varepsilon S_0}\right)^2 + \left(\frac{S}{\varepsilon S_0} - 1\right)^2. \tag{3.93}$$

Если за клапаном располагается большой резервуар, а перед ним трубопровод $\left(S_{k1} = S;\, S_{k2} >> S\right)$, тогда

$$\xi_{\text{кл}} = \left(1 + \xi_{\text{C}}\right)\left(\frac{S}{\varepsilon S_0}\right)^2 - 1. \tag{3.94}$$

Если перед клапаном располагается большой резервуар, а за ним трубопровод $\left(S_{k1} >> S;\, S_{k1} = S\right)$, то

$$\xi_{\text{кл}} = 1 + \xi_{\text{C}}\left(\frac{S}{\varepsilon S_0}\right)^2 + \left(\frac{S}{\varepsilon S_0} - 1\right)^2. \tag{3.95}$$

Поделив левую часть (3.91) на $\rho g \Delta H_0$, а правую часть на равную величину $\rho a Q_0 / S$, получим безразмерное выражение характеристики клапана

$$h_{k1} - h_{k2} = \rho\frac{Q_0}{2aS}\xi_{\text{кл}} q. \tag{3.96}$$

На рис. 3.21 показан вид характеристики клапана для всех трех рассмотренных случаев установки клапана. При открытии клапана характеристики становятся положе, а при закрытии – круче.

Распределители. На рис. 3.22 показана конструктивная схема четырехлинейного трехпозиционного распределителя.

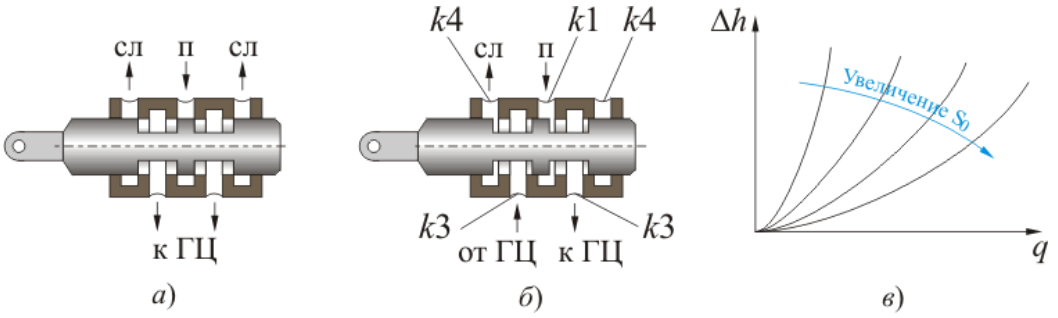


Рис. 3.22. К определению характеристики распределителя

Золотник распределителя имеет4 узла: $k1$, $k2$, $k3$, $k4$, причем характеристики узлов попарно связаны: $k1$ с $k2$ и $k3$ с $k4$ – при смещении влево из среднего положения, $k1$ с $k3$ и $k2$ с $k4$ – при смещении вправо. Диаметры всех соединительных линий будем считать одинаковыми:

$$S_{k1} = S_{k2} = S_{k3} = S_{k4} = S\,.$$

Разность давлений в узлах $k1$ и $k2$ при смещении золотника влево равна потерям давления, которые в первом приближении могут быть представлены в виде суммы потерь при сужении потока во входной щели $\Delta p_{\text{с}} = \xi_{\text{с}}\rho w_{\text{с}}^2 / 2$, потерь, связанных с расширением потока до почти полного гашения кинетической энергии в золотниковой камере $\Delta p_{\text{р}} = \rho w_{\text{с}}^2 / 2$ и потерь при выходе потока из золотниковой камеры и входе в линию с узлом $k2$ $\Delta p_{\text{вых}} = \xi_{ds[}\rho w_{\text{с}}^2 / 2$, аналогичных потерям при входе в трубу с острыми входными кромками. Следовательно

$$\Delta p_{12} = p_{k1} - p_{k2} = \xi_{\text{с}}\rho\frac{w_{\text{с}}^2}{2} + \rho\frac{w_{\text{с}}^2}{2} + \xi_{\text{вых}}\rho\frac{w_{\text{с}}^2}{2}\,. \qquad (3.97)$$

Скорость потока в сжатом сечении потока за выходной щелью

$$w_{\text{с}} = \frac{Q}{S}\left(\frac{S}{\varepsilon S_0}\right), \qquad (3.98)$$

где S_0 – площадь выходного окна распределителя; ε – коэффициент сжатия потока.

После подстановки (3.98) в (3.97) получим

$$\Delta p_{12} = p_{k1} - p_{k2} = \xi_{12}\frac{\rho}{2}\left(\frac{Q}{S}\right)^2, \qquad (3.99)$$

где ξ_{12} – коэффициент сопротивления канала распределителя $k1$–$k2$

$$\xi_{12} = \left(1 + \xi_{\text{с}}\right)\left(\frac{S}{\varepsilon S_0}\right)^2 + \xi_{\text{вых}}\,. \qquad (3.100)$$

В первом приближении можно принять $\xi_{\text{с}} = 0{,}1$; $\xi_{\text{вых}} = 0{,}5$; $\varepsilon = 0{,}7$. Для определения коэффициента сужения может использоваться и формула (3.90).

В относительный переменных уравнение характеристики канала $k1$–$k2$ распределителя имеет вид

$$\Delta h_{12} = \frac{Q_0}{2aS}\xi_{12}q^2\,, \qquad (3.101)$$

а ее график приведен на рис. 3.19, *в*.

Характеристику канала *k*3–*k*4 можно определить аналогично

$$\Delta p_{34} = p_{k3} - p_{k4} = \xi_{34}\frac{\rho}{2}\left(\frac{Q}{S}\right)^2. \qquad (3.102)$$

Коэффициент гидравлического сопротивления канала *k*3–*k*4 ξ_{34} находится по формуле (3.100). Безразмерная форма характеристики канала *k*3–*k*4:

$$\Delta h_{34} = h_3 - h_4 = \frac{Q_0}{2aS}\xi_{34}q^2. \qquad (3.103)$$

Аналогичным образом можно построить характеристики гидрораспределителей и других конструктивных схем.

Предохранительный (переливной) клапан. Конструктивная схема предохранительного клапана показана на рис. 3.23, *а*. На рис. 3.23, *б* показана характеристика предохранительного клапана действительная и приближенная, используемая при расчетах нестационарных процессов.

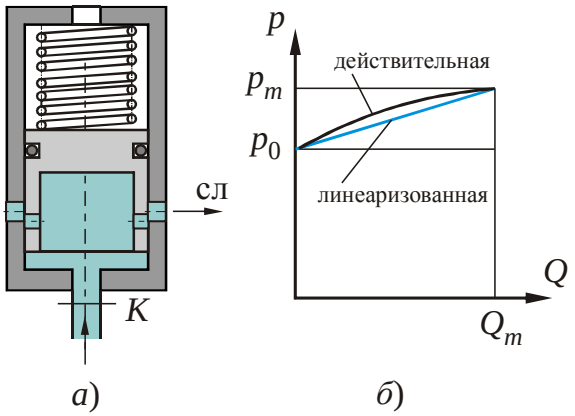


Рис. 3.23. К определению характеристики предохранительного клапана

Пусть p_0 – давление, при котором начинается открытие клапана, а p_m – давление, при котором клапан пропускает расход Q_m. Обычно эта разность давлений существенно меньше рабочего давления, то есть $p_m - p_0 << p_0$, что позволяет приближенно считать характеристику предохранительного клапана линейной. То есть

$$\frac{Q}{Q_m} = \frac{p - p_0}{p_m - p_0} \quad \text{или} \quad q = B(h - h_0)q_m, \qquad (3.104)$$

где

$$B = \frac{\rho g \Delta H_0}{p_m - p_0}; \quad h = \frac{p}{\rho g \Delta H_0}; \quad h_0 = \frac{p_0}{\rho g \Delta H_0}; \quad q_m = \frac{Q_m}{Q_0}; \quad \Delta H_0 = aQ_0/(gS).$$

3.5.4. Общие замечания по характеристикам элементов гидросистемы

Характеристик узлов и элементов гидросистемы формируют граничные условия волнового процесса. Отметим некоторые их общие свойства.

1. Характеристики узлов системы могут быть независимыми или взаимосвязанными. Независимую характеристику, связывающую режимные параметры потока (например, p–Q) только в одном сечении гидролинии, имеют концевые узлы гидросистемы.

Промежуточные, соседние узлы имеют взаимосвязанную (общую) характеристику, выражающую зависимость перепада давлений (или напоров) в соседних узлах от расхода (или скорости) потока жидкости через элемент гидросистемы, расположенный между этими узлами.

Поэтому при представлении всех характеристик узлов и элементов гидросистемы необходимы в общем случае две режимные плоскости p–Q (или p–w) и Δp–Q (или Δp–w), а в безразмерном виде h–q и Δh–q.

2. Характеристики узлов системы могут быть стационарными и нестационарными. Признаком нестационарности является наличие в уравнении характеристики производной по времени или параметров, изменяющихся по времени.

3. В волновых процессах наблюдается значительное изменение давления, в том числе и падение давления. Однако снижение давления в гидросистеме возможно лишь до давления парообразования $p_н$, при котором происходит нарушение сплошности жидкости и образование пузырей пара. Это минимально возможное давление в системе. Поэтому линию ограничения $p = p_н$ следует рассматривать как одно из граничных условий переходного процесса, как составную часть узловых характеристик.

4. АНАЛИЗ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В ГИДРОСИСТЕМЕ МЕТОДОМ ХАРАКТЕРИСТИК

4.1. Общие положения

Любая гидросистема состоит из различных, связанных между собою элементов: источников питания (насосы, напорные баки, аккумуляторы), исполнительных механизмов (гидроцилиндры, гидромоторы), регулирующей и направляющей аппаратуры (дроссели, клапаны, распределители) и соединительных линий. Схемы соединения этих элементов могут быть самыми разнообразными: разветвленными, одно и многокольцевыми, комбинированными.

Места соединения двух соседних элементов гидросистемы называют узлами. В расчетных схемах *узел – это сечение проточного тракта, граничное между двумя соседними элементами*.

Режим работы гидросистемы, как правило, характеризуется двумя параметрами: статическим напором (или давлением) и расходом (или скоростью потока). Связь этих параметрах в двух соседних узлах выражается:

- либо характеристикой элемента гидросистемы, расположенного между этими узлами, если он имеет короткую проточную часть и изменение режимных параметров в обоих узлах можно считать практически одновременным;
- либо характеристиками волн F и G, если оба узла принадлежат одной гидролинии.

В последнем случае приходится учитывать запаздывание в изменении режимных параметров в одном узле относительно другого, связанного с конечной скоростью распространения волн.

Совокупность уравнений и зависимостей, отражающих характеристики элементов гидросистемы и волн, в общем виде описывают как стационарную, так и нестационарную работу системы, включая переходные процессы. Поэтому расчет и анализ переходных процессов методом характеристик, в сущности, сводится к решению этой системы уравнений.

Переход от реальной конструктивной схемы гидросистемы к расчетной схеме сопряжен с некоторыми упрощениями, наиболее существенными среди которых являются следующие три.

Во-первых, характеристики ряда элементов представляются приближенно, с учетом влияния на них только существенных факторов.

Во-вторых, запаздывание в изменении режимных параметров на входе и выходе элемента системы учитывается только у длинных соединительных линий и делается это с помощью волновых уравнений. У остальных элементов с короткой проточной частью этим запаздыванием пренебрегают, то есть считают, что все режимные параметры элемента изменяются одновременно, как при медленно изменяющемся течении.

В-третьих, сопротивление трения, распределенное по всей длине соединительных линий зачастую «собирают» в концевых или промежуточных (при их наличии) узлах и учитывают как местные сопротивления, создающие такие же потери

давления, как и распределенные потери. Эти местные сопротивления учитывают при построении характеристик узлов.

В настоящем разделе используются следующие основные обозначения переменных:

l – характерная длина соединительных линий;

$t^* = l/a$ – характерное время процесса;

$\tau = t / t^*$ – относительное время;

$\Delta\tau = \tau_{i+1} - \tau_i = 1,\ i = 0, 1, 2...$ – шаг временной сетки (временной шаг расчета переходного процесса в гидросистеме);

Q_0 – характерный объемный расход жидкости в гидросистеме;

$q = Q/Q_0$ – относительный расход;

ΔH_0– характерный перепад статических напоров в системе, связанный с характерным расходом уравнением Жуковского

$$\Delta H_0 = \frac{aQ_0}{gS},$$

где a – скорость волны; S – площадь поперечного сечения соединительного трубопровода;

$h = \dfrac{H_{\text{ст}}}{\Delta H_0} = \dfrac{p}{\rho g H_0}$ – относительный напор или давление, где $H_{\text{ст}}$ – статический напор потока.

Волновые уравнения (1.51), (1.52) при переходе к безразмерным параметрам принимают вид

$$\begin{cases} (h - h_0) + (q - q_0) = 2\sum F(\tau - x_*), \\ (h - h_0) - (q - q_0) = 2\sum G(\tau + x_*), \end{cases} \tag{4.1}$$

а уравнения (1.53)

$$\begin{cases} h - h_0 = \sum F(\tau - x_*) + \sum G(\tau + x_*), \\ q - q_0 = \sum F(\tau - x_*) - \sum G(\tau + x_*), \end{cases}, \tag{4.2}$$

причем функции F и G в этих уравнениях отличаются от имеющих то же обозначение волновых функций в уравнениях (1.51), (1.52), (1.53) множителем

$$\frac{1}{\rho g \Delta H_0} = \frac{S}{\rho a Q_0}.$$

4.2. Фазовые характеристики волн

Аргументы волновых функций $(t \pm x / a)$ называют *фазами волн* и обозначают φ_F и φ_G. Точки потока с одинаковыми фазами образуют *фазовую плоскость*. Так у волн, распространяющихся от точечного источника в неограниченном пространстве, фазовые поверхности имеют сферическую форму, а у одномерных волн в цилиндрической трубе – плоскую. Уравнения фаз волн для последнего случая имеют вид

- $\varphi_F = t - \dfrac{x}{a} = \text{const}$ – у волн $F(\varphi_F)$, бегущих по потоку вдоль оси x;
- $\varphi_G = t + \dfrac{x}{a} = \text{const}$ – у волн $G(\varphi_G)$, бегущих против потока против оси x.

В фиксированный момент времени ($t = \text{const}$) имеем $x = \text{const}$ – уравнение плоскости, ортогональной оси трубопровода.

С течением времени положение фазовых плоскостей, характеризуемое координатой x, изменяется: они движутся вместе с соответствующей волной со скоростью волны. При этом каждой фазовой плоскости волны соответствует не только определенное значение аргумента волновой функции, но и самой функции. Поэтому наблюдатель, движущийся вместе с фазовой плоскостью (с волной), не заметит изменения ни формы волны, ни значения волновой функции. Эти изменения будут наблюдаться лишь при переходе с одной фазовой плоскости на другую.

Следовательно, *каждой фазовой плоскости волны свойственно не только значение фазы, но и значение соответствующей волновой функции. При движении фазовой плоскости это значение волновой функции не изменяется.*[*]

Из уравнений (1.51), (1.52) следует связь между параметрами потока (p, w) в фазовой плоскости. Так как у волны, распространяющейся вдоль оси x, в фазовой плоскости значение волновой функции $F(t - x/a)$ постоянно, то

$$p + \rho a w = \text{const}. \tag{4.3}$$

В фазовой плоскости волны, движущейся против оси x, $G(t + x/a) = \text{const}$, поэтому

$$p - \rho a w = \text{const}, \tag{4.4}$$

что следует из (1.53).

Соотношения (4.3) и (4.4) называют *фазовыми характеристиками волн*. На рис. 4.1, *а* приведены графики этих зависимостей.

Как видно из (4.3) и (4.4), фазовые характеристики при $\rho a = \text{const}$ представляют собой линейные зависимости. В координатах p–w они представляют собой прямые, отличающиеся лишь знаком угловых коэффициентов $k_F = -\rho a, k_G = \rho a$. Если рассматривать фазовые характеристики в относительных координатах h–q, то угловые коэффициенты примут значения $k_F = -1, k_G = 1$.

Значения констант в уравнениях (4.3) и (4.4) зависят от фаз волн, поскольку от фазы зависит значение соответствующей волновой функции. Угловой же коэффициент от фазы не зависит. Поэтому изменение фазы приводит к параллельному смещению фазовой характеристики волны влево или вправо (см. рис. 4.1, *а*).

---

[*] Постоянство волновой функции, принадлежащей рассматриваемой фазовой плоскости, выполняется только для волн, распространяющихся в идеальной жидкости, то есть не имеющей вязкости.

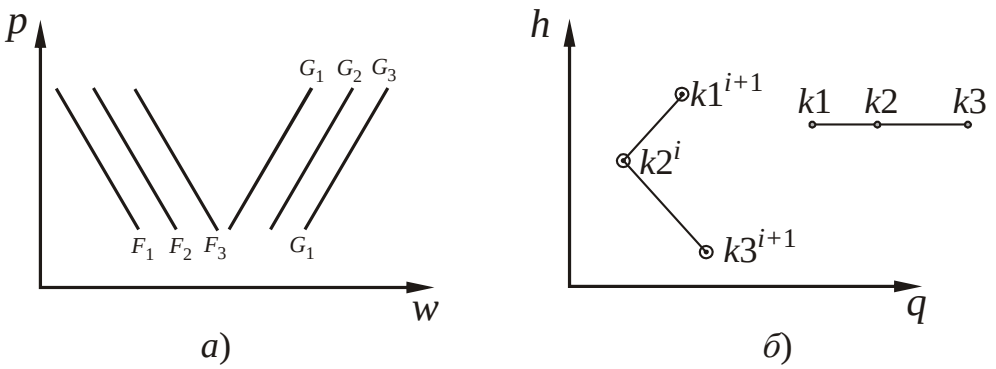


Рис. 4.1. Фазовые характеристики волн

Для наблюдателя, движущегося с фазовой плоскостью, фазовая характеристика будет оставаться постоянной. Это значит, что наблюдатель будет регистрировать в разных сечениях трубопровода (по пути своего следования) только такие режимы потока (например, *p* и *w*), которые соответствуют точкам данной фазовой характеристики.

Следовательно, *фазовая характеристика волны связывает параметры потока (p и w) в разных сечениях трубопровода в моменты времени, отвечающие одной фазе волнового процесса,* и таким образом она позволяет предсказать по известным параметрам течения на одном конце соединительной линии возможные режимы на противоположном конце этой линии, но в более поздние моменты времени, соответствующие приходу туда волны с той же фазой.

На рис. 4.1, *б* показана гидросистема из двух трубопроводов длиной *l* и трех узлов *k*1, *k*2, *k*3. Давление и расход в среднем узле в момент времени *i* пусть соответствуют точке $k2^{i}$ на рис. 4.1, *б*. Две прямые с угловыми коэффициентами $\pm\rho a$, проходящие через эту точку представляют собой фазовые характеристики волн *G* и *F* соответственно, пробегающих узел *k*2 в этот момент времени. Обе волны достигнут узлов *k*1 и *k*3 через промежуток времени $\Delta t = l / a \left(\text{или } \Delta\tau = 1\right)$ в момент времени *i* + 1, сохранив значение фазы. Поэтому параметры потока (*h*, *q*) в данных узлах должны располагаться на соответствующих фазовых характеристиках. Эти параметры показаны на рис. 4.1, *б* в виде точек $k1^{i+1}$ и $k3^{i+1}$.

4.3. Пример расчета переходного процесса в объемном гидроприводе методом характеристик

Гидропривод включает гидродвигатель (двухштоковый гидроцилиндр), нагруженный постоянной внешней силой *R*, трехпозиционный гидрораспределитель, блок питания и соединительные линии, рис. 4.2. Рассмотрим переходный процесс в приводе при перемещении золотника гидрораспределителя из среднего положения, в позицию, зафиксированную на схеме. Время переключения $t_{р.}$

Расчетные узлы, в которых будем определять рабочие параметры, показаны на рис.4.1. На напорной и сливной линии гидроцилиндра введем промежуточные узлы 4 и 7 (см. рис. 4.2), таким образом, чтобы длины всех соединительных линий между соседними узлами были одинаковыми. Запаздывание параметров работы будем учитывать только в узлах длинных гидролиний. В узлах же гидроцилиндра

5 и 6, а также элементов блока питания, соединенных короткими трубками, изменение параметров потока будем считать одновременным.

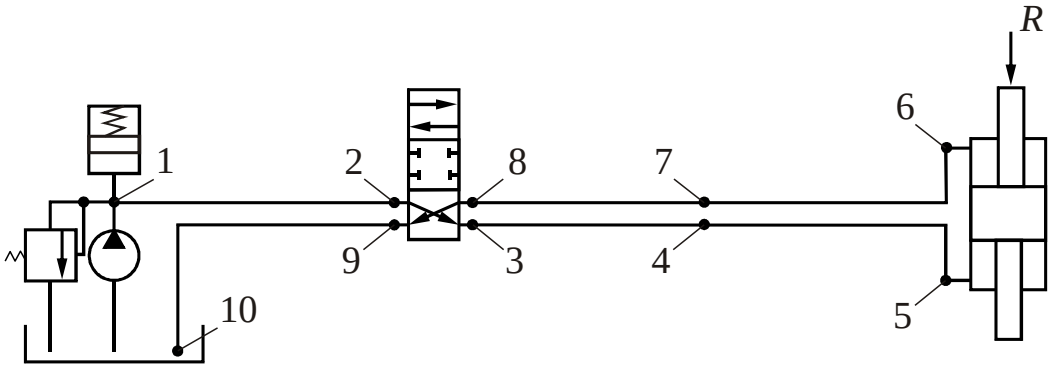


Рис. 4.2. Расчетная схема гидропривода

В качестве масштабных величин при определении относительных переменных задачи примем:

- расход насоса $Q_0 = Q_н$;
- ударное повышение давления $\Delta p_0 = \rho a Q_н / S$ или соответствующее ударное повышение напора $\Delta H_0 = \Delta p_0/(\rho g)$, где S – площадь поперечного сечения соединительных трубопроводов, диаметр которых в данной задаче одинаков;
- длина соединительной линии между соседними узлами l;
- время t_μ прохождения волной расстояния l: $t_\mu = l / a$.

Давление в сливном баке считаем равным атмосферному давлению $p_{ат}$.

Решение задачи будем выполнять численным методом. Для этого задаемся шагом интегрирования по времени $\Delta\tau$ и составим систему уравнений, связывающую искомые рабочие параметры в каждом узле схемы в последующий (i + 1)-й момент времени с параметрами, значения которых известны на момент времени i.

Узел 1 (блок питания). Давление во всех элементах блока питания (на выходе из насоса, перед предохранительным клапаном и в аккумуляторе давления) считаем одинаковым ввиду малой протяженности соединяющих их линий. Это давление, то есть давление в первом узле, приведенное к безразмерной форме, обозначим через h_1^{i+1}.

Баланс расходов в первом узле, следующий из конструктивной схемы блока питания, имеет вид

$$q_1^{i+1} = q_н - q_{кл}^{i+1} + q_а^{i+1}, \tag{4.5}$$

где $q_н = Q_н / Q_н = 1$ – относительный расход насоса; $q_{кл} = Q_{кл} / Q_н$ – относительный расход предохранительного клапана; $q_а = Q_а / Q_н$ – относительный расход аккумулятора.

В соответствии с (3.104)

$$q_{кл}^{i+1} = 1(h) B_{кл} \left(h_1^{i+1} - h_{кл\,min} \right) q_{кл\,max}, \tag{4.6}$$

где $1(h)$ – единичная функция; $B_{\text{кл}} = \Delta p_0 / \left(p_{\text{кл max}} - p_{\text{кл min}} \right)$ – параметр предохранительного клапана; $h_{\text{кл min}} = p_{\text{кл min}} / \Delta p_0$ – относительное настроечное давление (давление начала открытия) клапана; $q_{\text{кл max}} = Q_{\text{кл max}} / Q_{\text{н}} = Q_{\text{н}} / Q_{\text{н}} = 1$ – относительный максимальный расход через клапан. В последних соотношениях $p_{\text{кл min}}$ – давление начала открытия клапана; $p_{\text{кл max}}$ – давление, соответствующее расходу через клапан $Q_{\text{н}}$, а единичная функция определяется соотношением

$$1(h) = \begin{cases} 0 \text{ при } h_1^i < h_{\text{кл min}}, \text{ то есть клапан закрыт,} \\ 1 \text{ при } h_1^i > h_{\text{кл min}}, \text{ то есть клапан открыт.} \end{cases}$$

Относительный расход аккумулятора найдем, пользуясь (3.72)

$$q_{\text{а}}^{i+1} = 1(m_{\text{а}}) \left[\frac{1}{B_{\text{а}} \Delta\tau} \left(h_1^i - h_1^{i+1} \right) - q_{\text{а}}^i \right], \tag{4.7}$$

где $1(m_{\text{а}})$ – единичная функция, учитывающая ограниченность запаса жидкости в аккумуляторе; $B_{\text{а}} = \dfrac{c_{\text{пр}} l S}{2\rho a^2 S_{\text{а}}^2}$ – параметр аккумулятора. В последней формуле $c_{\text{пр}}$, $S_{\text{а}}$ – жесткость пружины аккумулятора и площадь его поршня; l, S – длина соединительной линии гидропривода между соседними узлами и площадь ее поперечного сечения.

$$1(m_{\text{а}}) = \begin{cases} 0 \text{ при } m_{\text{а}} \le 0, \text{ то есть аккумулятор пуст,} \\ 1 \text{ при } m_{\text{а}} > 0, \text{ то есть аккумулятор заполнен.} \end{cases}$$

Подставив (4.7) и (4.6) в (4.5), получим уравнение характеристики первого узла

$$q_1^{i+1} = b_1^i h_1^{i+1} + a_1^i, \tag{4.8}$$

где коэффициенты a_1^i, b_1^i определяются формулами

$$a_1^i = q_{\text{н}} + 1(h) B_{\text{кл}} h_{\text{кл min}} q_{\text{кл max}} + 1(m_{\text{а}}) \left[\frac{h_1^i}{B_{\text{а}} \Delta\tau} - q_{\text{а}}^i \right];$$

$$b_1^i = -\frac{1(m_{\text{а}})}{B_{\text{а}} \Delta\tau} - 1(h) B_{\text{кл}} q_{\text{кл max}}.$$

Уравнение (4.8) связывает между собой две неизвестные величины q_1^{i+1} и h_1^{i+1}. Следовательно, для их определения необходимо еще одно уравнение. Таким уравнением может служить соотношение между параметрами потока на волне G, отраженной от узла 2, то есть характеристическое уравнение этой волны. В данном расчете будем использовать характеристические уравнения волн, распространяющихся в реальной жидкости (с учетом сил трения), то есть в форме (1.64) и (1.65). Напомним, что эти выражения характеристических уравнений получены при условии, что относительный шаг интегрирования по времени $\Delta\tau = 1$. Это есть время распространения волны между соседними узлами гидролинии, что и позво-

ляет в удобной для вычислений форме связать гидродинамические параметры в этих узлах. Поэтому интегрирование и других уравнений (уравнений характеристик улов) в данной задаче также будет выполняться с относительным шагом $\Delta\tau = 1$, что учтено в приводимых далее формулах.

Следует отметить, что в некоторых случаях может возникнуть необходимость использования мелкого шага, например, когда в узлах располагаются нестационарные малоинерционные элементы (гидроцилиндр с малой приведенной массой поршня, аккумулятор давления, имеющий пружину с высокой жесткостью и поршень малого диаметра и пр.). Оценить степень инерционности элемента можно по величине параметра B в уравнении его характеристики, который по физическому смыслу представляет собой отношение масштаба времени $t_\mu = l / a$ к постоянной времени элемента гидросистемы. Если $B >> 1$, то для численного интегрирования необходимо использовать шаг более мелкий, чем $\Delta t = t_\mu$. В противном случае применяемая для интегрирования обыкновенного дифференциального уравнения типа (3.75) аппроксимация производной первая конечная разность может привести к большой погрешности решения и его нефизическому поведению. Уменьшить параметр B можно за счет уменьшения t_μ. Для этого необходимо ввести дополнительные промежуточные узлы на трубопроводах гидросистемы, уменьшив тем самым расчетную длину трубопровода l.

Таким образом, второе уравнение для первого узла (характеристическое уравнение волны G) будет иметь вид

$$h_1^{i+1} = \left(1 + c_2^i\right) q_1^{i+1} - q_2^i + h_2^i, \tag{4.9}$$

где параметр сопротивления c_2^i находится по формуле

$$c_2^i = c_0 \left| q_2^i \right| = \frac{1}{2} \rho \frac{Q_\text{н}}{S} \frac{l}{aD} \lambda_2^i \left| q_2^i \right|. \tag{4.10}$$

Коэффициент трения λ_2^i, входящий в (4.10), находится по следующим известным из общего курса гидравлики критериальным уравнениям.

Если число Рейнольдса

$$\mathrm{Re}_2^i = \frac{4Q_\text{н}}{\pi D_\text{т} \nu} q_2^i \le 2000, \tag{4.11}$$

тогда имеем ламинарный режим течения и

$$\lambda_2^i = 64 / \mathrm{Re}_2^i. \tag{4.12}$$

Если число Рейнольдса (4.11) $\mathrm{Re}_2^i \ge 4000$, то есть реализовался турбулентный режим течения, то

$$\lambda_2^i = 0{,}11 \left(\Delta + \frac{68}{\mathrm{Re}_2^i} \right)^{0{,}25}, \tag{4.13}$$

где Δ – относительная шероховатость трубопровода.

При переходном режиме течения рабочей жидкости $\left(2000 < \mathrm{Re}_2^i < 4000\right)$ используем формулы

$$\lambda_2^i = \gamma\lambda_{2\,\text{т}}^i + (1-\gamma)\lambda_{2\,\text{л}}^i, \tag{4.14}$$

где $\lambda_{2\,\text{т}}^i, \lambda_{2\,\text{л}}^i$ – турбулентный и ламинарный коэффициенты трения, определяемые по формулам (4.13) и (4.12) соответственно, а весовой коэффициент γ определяется по соотношению

$$\gamma = \left(\frac{\text{Re}_2^i}{2000} - 1\right)^2 \sin\frac{\pi}{2}.$$

Использование формулы (4.14) для переходного режима течения позволяет исключить немонотонность изменения гидродинамических параметров вблизи точки смены режимов течения.

Подставив (4.8) в (4.9), находим величину напора в первом узле на следующем временном слое

$$h_1^{i+1} = \frac{h_2^i - q_2^i + a_1^i\left(1 + c_2^i\right)}{1 - b_1^i\left(1 + c_2^i\right)}. \tag{4.15}$$

Расход в первом узле q_1^{i+1} находится подстановкой результата вычислений по формуле (4.15) в (4.8). Таким образом, параметры течения потока рабочей жидкости h_1^{i+1}, q_1^{i+1} в первом узле на следующем временном слое найдены.

Узлы 2 и 3. Узел 2 является начальной точкой напорного канала гидрораспределителя. Конечной точкой этого канала является узел 3. Протяженность гидравлического канала 2–3 пренебрежимо мала по сравнению с протяженностью трубопровода, что позволяет не учитывать волновые процессы в данном канале. Поэтому узлы 2 и 3 рассматриваем совместно, так же, как совместно рассматривались, устройства, входящие в блок питания.

Характеристику канала 2–3 запишем, используя выражение (3.101)

$$\begin{cases} h_2^{i+1} - h_3^{i+1} = \zeta_{2-3}\tilde{q}_{\text{н}}\left(q_2^{i+1}\right)^2; \\ q_2^{i+1} = q_3^{i+1}, \end{cases} \tag{4.16}$$

где $\tilde{q}_{\text{н}} = Q_{\text{н}} / (2aS)$ – приведенный расход насоса; ξ_{2-3} – коэффициент гидравлического сопротивления канала 2–3, который находим по формулам

$$\xi_{2-3} = \begin{cases} 0{,}5 + \dfrac{1{,}1}{\bar{S}_{\text{р}}^2} & \text{при } (i+1) < \tau_{\text{р}}; \\ 1{,}26 & \text{при } (i+1) \geq \tau_{\text{р}}, \end{cases}$$

где $\tau_{\text{р}} = \dfrac{t_{\text{р}}}{l}a$ – относительное время перемещения золотника гидрораспределителя.

Относительная площадь прохода канала гидрораспределителя $\bar{S}_{\text{р}} = \varepsilon S_0 / S$ определяется в предположении, что степень открытия канала S_0 / S изменяется линейно по времени:

$$\bar{S}_{\text{р}} = \left(0,62 + 0,58\frac{(i+1)}{\tau_{\text{р}}}\right)\frac{(i+1)}{\tau_{\text{р}}}$$

Характеристика гидрораспределителя (4.16) включает два уравнения. В то же время в узлах 2 и 3 имеем 4 неизвестные величины: $q_2^{i+1}, q_3^{i+1}, h_2^{i+1}, h_3^{i+1}$. Для замыкания системы уравнений используем характеристические уравнения волны *G*, пришедшей в узел 3 из узла 4 и волны *F*, пришедшей в узел 2 из узла 1. Характеристическое уравнение волны *G* имеет вид, аналогичный (4.9)

$$h_3^{i+1} = \left(1 + c_4^i\right)q_3^{i+1} - q_4^i + h_4^i, \tag{4.17}$$

где параметр сопротивления c_4^j находится по формулам (4.10)…(4.14) с соответствующей заменой нижнего индекса. Характеристическое уравнение волны *F* запишем, используя (1.64)

$$h_2^{i+1} = h_1^i + q_1^i - \left(1 + c_1^i\Delta\tau\right)q_2^{i+1}. \tag{4.18}$$

Вычитая из (4.18) (4.17) и подставляя результат в (4.16), получим следующее квадратное уравнение для определения расхода в узлах 2 и 3

$$a\left(q_2^{i+1}\right)^2 + bq_2^{i+1} + c = 0, \tag{4.19}$$

где

$$a = \xi_{1-2}\tilde{q}_{\text{н}};\;\; b = 2 + c_1^i + c_4^i;\;\; c = h_4^i - q_4^i - h_1^i - q_1^i.$$

После решения уравнения (4.19) параметры потока в узлах 2 и 3 находятся по уравнениям (4.16), (4.17), (4.18).

Узел 4. Параметры потока в промежуточном узле 4 находятся из соотношений на волнах *F* и *G*, приходящих в данный узел из соседних узлов 3 и 5 соответственно:

$$h_4^{i+1} = h_3^i + q_3^i - \left(1 + c_3^i\right)q_4^{i+1}; \tag{4.20}$$

$$h_4^{i+1} = \left(1 + c_5^i\right)q_4^{i+1} - q_5^i + h_5^i. \tag{4.21}$$

Отсюда находим

$$q_4^{i+1} = \frac{h_3^i + q_3^i - h_5^i + q_5^i}{2 + c_3^i + c_5^i} \tag{4.22}$$

Величина напора в узле 4 находится подстановкой результата вычисления расхода по (4.22) в любое из уравнений (4.20) или (4.21).

Узлы 5 и 6. Уравнение характеристики гидроцилиндра запишем, используя (3.76)

$$\begin{cases} q_5^{i+1} = q_6^{i+1}; \\ q_5^{i+1}\left(1 + \bar{k}_{\text{тр}}B_{\text{ц}}\right) - q_5^i = B_{\text{ц}}\left(h_5^{i+1} - h_6^{i+1} + h_5^i - h_6^i - \bar{k}_{\text{тр}}q_5^i - 2\bar{R}\right), \end{cases} \tag{4.23}$$

где $B_{\text{ц}} = \rho l S_{\text{п}}^2 / \left(2m_{\text{п}}S\right)$ – параметр гидроцилиндра; $\bar{R} = R / \left(\rho g \Delta H_0 S_{\text{п}}\right)$ – относительная статическая нагрузка; $\bar{k}_{\text{тр}} = k_{\text{тр}}S / \left(S_{\text{п}}^2\rho a\right)$– относительный коэффициент

трения. В последних формулах $m_п$, $S_п$ – приведенная масса и площадь поршня гидроцилиндра; R – абсолютное значение статической нагрузки; $k_{тр}$ – абсолютное значение коэффициента трения.

Для определения всех неизвестных параметров потока рабочей жидкости в узлах 5 и 6 необходимо к двум уравнениям характеристики гидроцилиндра (4.23) добавить соотношения на волне F, приходящей к узлу 5 из узла 4 и соотношение на волне G, приходящей к гидроцилиндру из узла 7:

$$h_5^{i+1} = h_4^i + q_4^i - \left(1 + c_4^i\right) q_5^{i+1}; \tag{4.24}$$

$$h_6^{i+1} = \left(1 + c_7^i\right) q_6^{i+1} - q_7^i + h_7^i. \tag{4.25}$$

Подставив (4.24) и (4.25) в (4.23), получим

$$q_5^{i+1} = \frac{q_5^i\left(1 - B_ц \bar{k}_{тр}\right) + B_ц\left(h_4^i + q_4^i + q_7^i - h_7^i + h_5^i - h_6^i - 2\bar{R}\right)}{1 + \left(2 + c_4^i + c_7^i + \bar{k}_{тр}\right) B_ц}. \tag{4.26}$$

После определения расхода величины напоров находятся подстановкой результата в (4.24) и (4.25).

Скорость $v_п^{i+1}$ и перемещение $x_п^{i+1}$ поршня гидроцилиндра (в размерных единицах) находятся по формулам

$$v_п^{i+1} = \frac{q_5^{i+1} Q_н}{S_п}. \tag{4.27}$$

$$x_п^{i+1} = x_п^i + v_п^{i+1} \Delta\tau \frac{l}{a}. \tag{4.28}$$

Узел 7. Параметры течения в промежуточном узле 7 находятся по формулам (4.22), (4.21) с заменой нижних индексов: 4 на 7, 5 на 8 и 3 на 6.

Узлы 8 и 9. Параметры в узлах сливного канала гидрораспределителя находятся аналогично параметрам в узлах напорного канала. То есть используется характеристика сливного канала и соотношения на волне F, приходящей к узлу 8 из узла 7, и на волне G, приходящей к узлу 9 из узла 10. Для расчета могут использоваться формулы (4.16)…(4.19) с заменой нижних индексов: 2 на 8, 3 на 9, 1 на 7, 4 на 10.

Узел 10. Узел 10 представляет собой стык сливного трубопровода с атмосферным баком. Характеристика узла может быть представлена в виде равенства статического давления в узле атмосферному давлению:

$$h_{10}^{i+1} = h_{ат}, \tag{4.29}$$

где $h_{ат} = \dfrac{p_{ат} S}{\rho a Q_н}$ – относительное атмосферное давление.

Вторым уравнением для определения параметров потока в узле является соотношение на волне F, приходящей к узлу 10 из узла 9:

$$h_{10}^{i+1} = h_9^i + q_9^i - \left(1 + c_9^i\right) q_{10}^{i+1}. \tag{4.30}$$

Подставив (4.30) в (4.29), получим

$$q_{10}^{i+1} = \frac{h_9^i + q_9^i - h_{\text{ат}}}{1 + c_9^i}. \qquad (4.31)$$

Начальные условия. В начальный момент времени $t = \tau_0 = i = 0$ золотник распределителя находится в среднем положении. При этом расходы рабочей жидкости во всех узлах, а также расход из аккумулятора равны нулю, давление в первом и втором узле равно максимальному давлению предохранительного клапана. Давление в остальных узлах – атмосферное. Перемещение и скорость поршня гидроцилиндра равны нулю. То есть

$$h_1^0 = h_2^0 = \frac{p_{\text{кл max}}}{\Delta p_0},\ h_k^0 = h_{\text{ат}}\ (k = 3,...,10),\ q_m^0 = 0\ (m = 1,...,10),$$
$$v_{\text{п}}^0 = x_{\text{п}}^0 = 0;\quad q_{\text{а}}^0 = 0. \qquad (4.32)$$

Расчет по приведенным соотношениям ведется последовательно, начиная с временного слоя $i = 0$, с шагом $\Delta\tau = 1$ до достижения заданной длительности процесса.

Исходные данные, использованные в расчете, приведены в табл. 1.

Таблица 1

Наименование параметра	Размерность	Величина
1 Коэффициент кинематической вязкости рабочей жидкости ν	сСт	20
2 Скорость распространения волн a	м/с	1000
3 Длина соединительного трубопровода l	м	4
4 Внутренний диаметр трубопровода D	мм	8
5 Время переключения гидрораспределителя $t_{\text{р}}$	с	0,1
6 Приведенная масса поршня гидроцилиндра	кг	980
7 Плотность рабочей жидкости ρ	кг/м^3	900
8 Относительная шероховатость трубопровода Δ	–	0,002
9 Подача насоса $Q_{\text{н}}$	л/мин	12
10Давление начала срабатывания предохранительного клапана $p_{\text{кл min}}$	МПа	3,4
11Максимальное давление перед клапаном $p_{\text{кл max}}$	МПа	3,6
12Нагрузка на штоке гидроцилиндра R	кН	100
13Ход поршня гидроцилиндра до упора	мм	400
14Диаметр поршня гидроцилиндра $D_{\text{п}}$	мм	250
15Диаметр штока гидроцилиндра $d_{\text{шт}}$	мм	10
16Диаметр поршня аккумулятора $D_{\text{а}}$	мм	40
17Жесткость пружины аккумулятора $c_{\text{пр}}$	кН/м	20
18Коэффициент трения поршня гидроцилиндра	кН·с/м	1000

Результаты расчета переходного процесса показаны на рис. 4.3,…4.6.

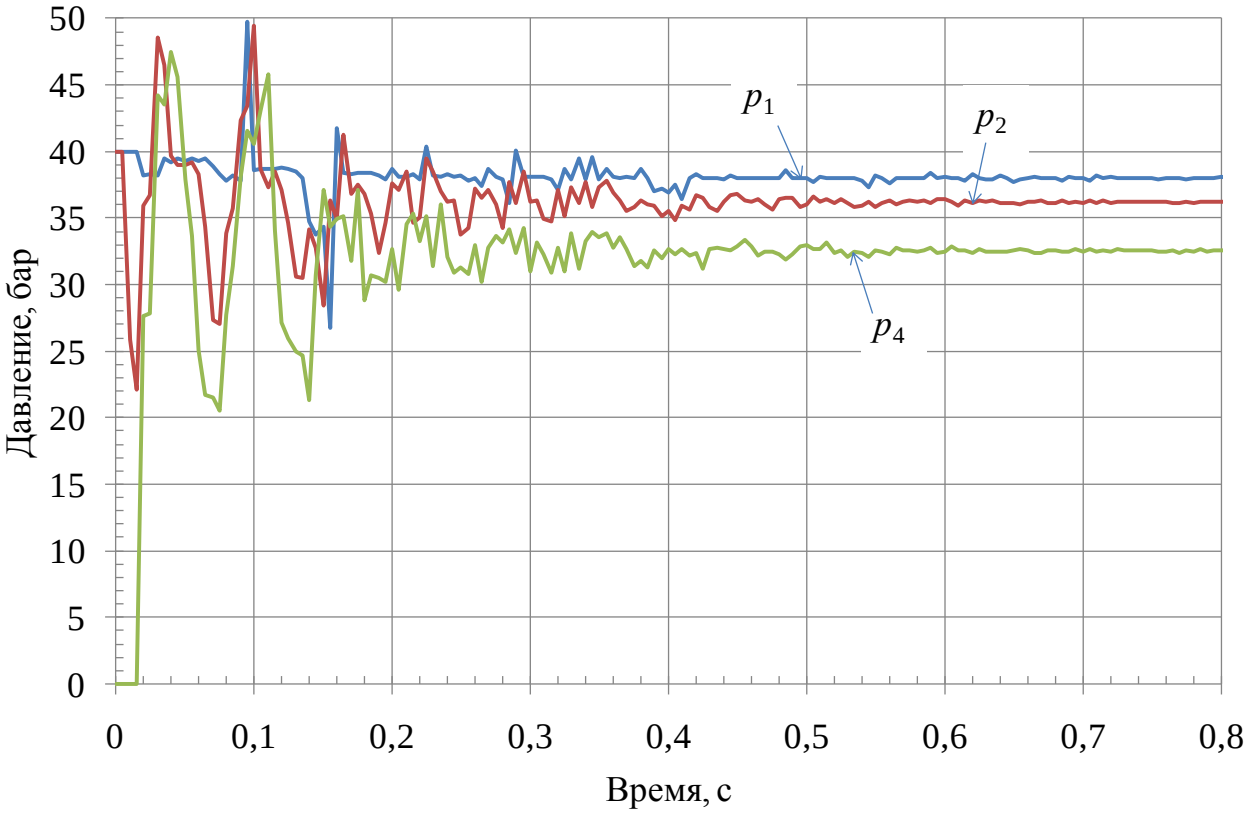


Рис. 4.3. Изменение давления на источнике питания p_1, перед гидрораспределителем p_2 и перед гидроцилиндром p_4 по времени переходного процесса

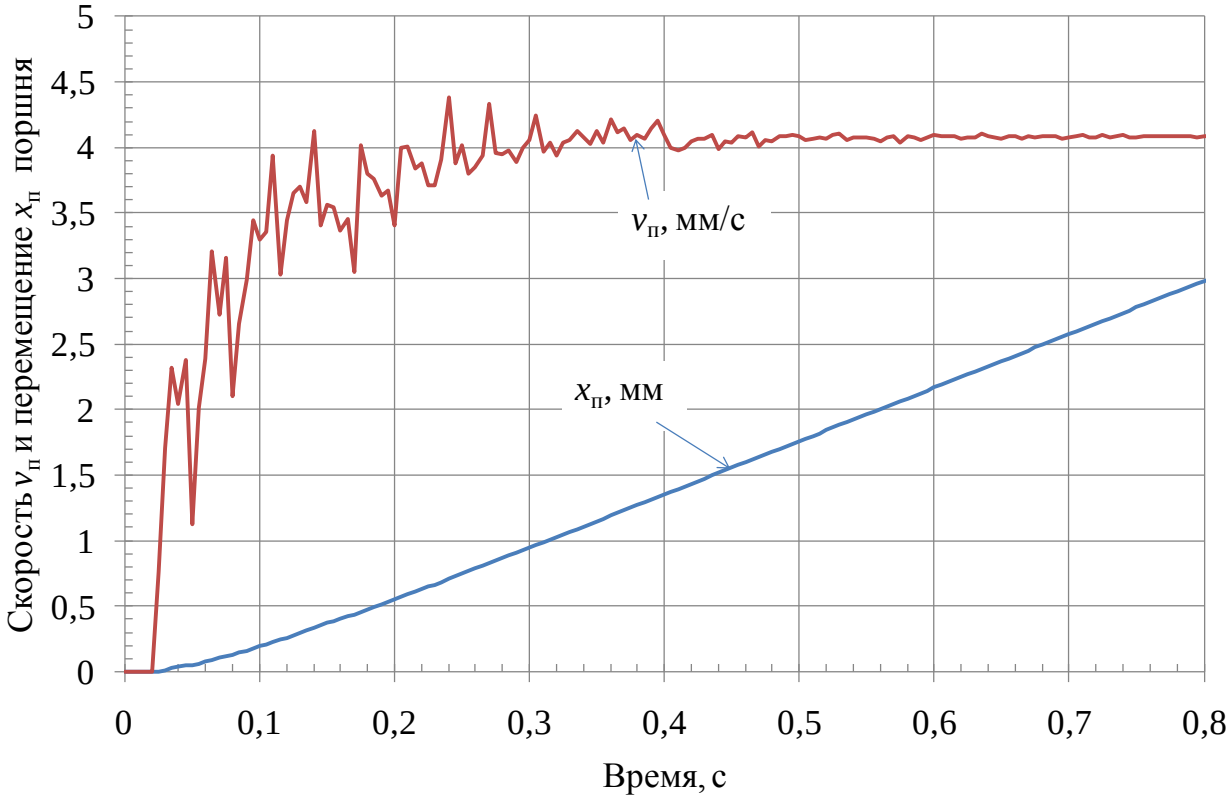


Рис. 4.4. Изменение скорости $v_п$ и перемещения поршня гидроцилиндра $x_п$ по времени переходного процесса

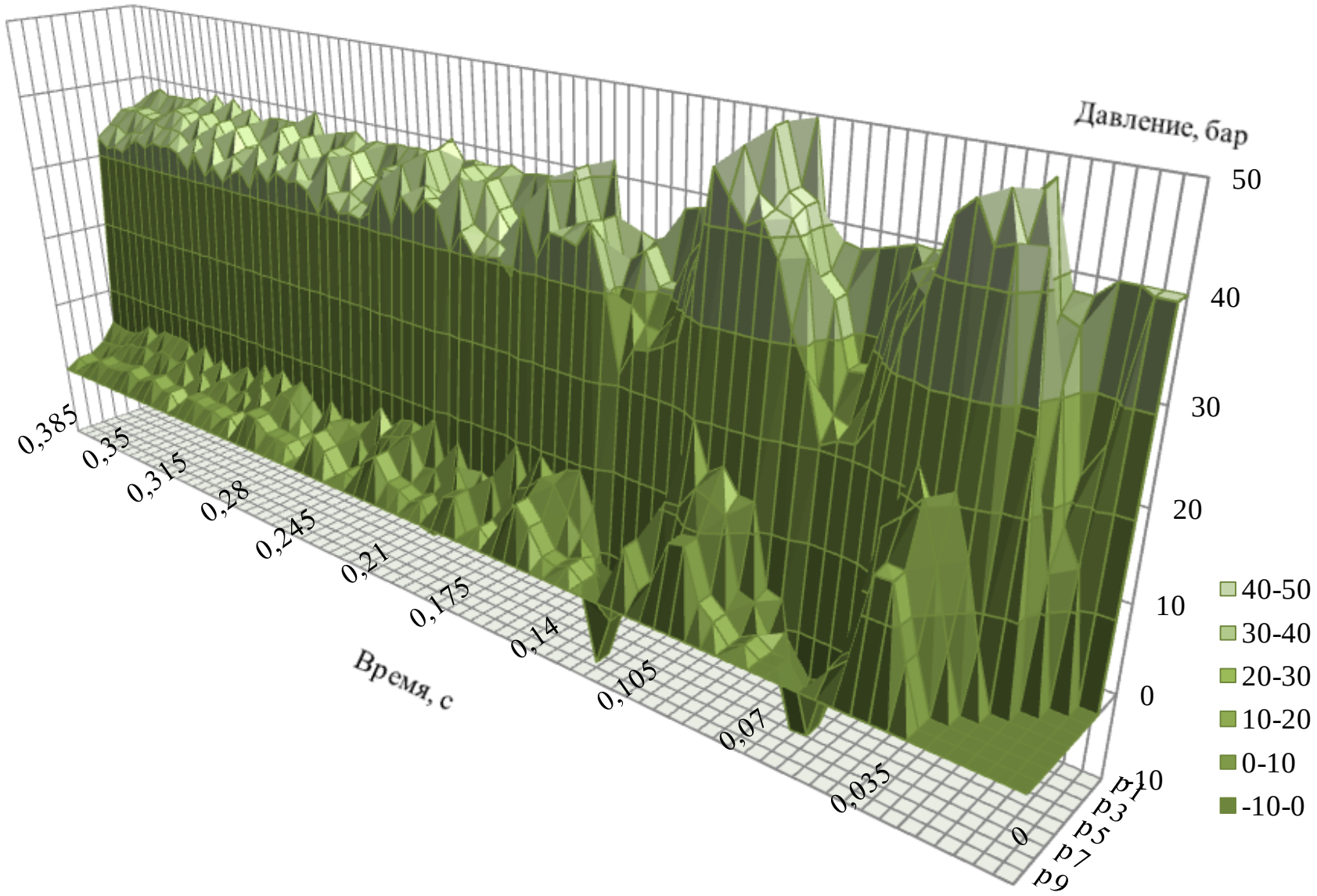


Рис. 4.5. Изменение давления в узлах гидропривода по времени переходного процесса

Как видно из результатов расчета переходный процесс в системе завершается через ~ 0,8 с. В начале переходного процесса наблюдается интенсивный волновой процесс в трубопроводах гидропривода приводящий к значительным забросам давления в системе выше стационарного уровня и колебаниям скорости перемещения поршня. При этом в периоды заброса давления в источнике питания выше 40 бар срабатывает предохранительный клапан. Из графиков видна задержка изменения давления в различных точках гидропривода, обусловленная конечной скоростью распространения волн сжатия-расширения. Необходимо также обратить внимание на то, что в период разгона поршня (моменты времени $t \approx 0{,}6$ с и $t \approx 1{,}2$ с) в узлах гидропривода, расположенных за поршнем, расчетное давление значительно меньше атмосферного, что обусловлено влиянием инерционных характеристик поршня. Этот факт свидетельствует о том, что в данных точках гидропривода возникает нарушение сплошности течения (кавитация). В данном расчете эффект кавитации не учитывался.

Программа расчета переходного процесса в гидроприводе, реализующая изложенный выше алгоритм и написанная в среде VBA MS Excel, приведена в файле WaiveProcess.xlsm.

4.4. Общий алгоритм расчета переходного волнового процесса в гидросистеме методом характеристик

Алгоритм расчета переходного волнового процесса в гидросистеме методом характеристик основан на следующих положениях.

1. Параметры потока в начальный момент времени $t = 0$ во всех узлах гидросистемы известны.

2. Внешнее воздействие, передающееся через один или несколько элементов гидросистемы и приводящее к изменению расхода или давления на выходе из данных элементов, известно в каждый момент времени.

3. Комплекс характеристик элементов гидросистемы и фазовых характеристик волн в узлах образуют замкнутую систему уравнений для определения параметров потока во всех узлах гидросистемы в каждый момент времени. Покажем это на примере системы, гидролинии которой не имеют узлов ветвления.*

Все узлы гидросистемы могут быть подразделены на три типа.

1 Узлы, в которых установлены элементы, являющиеся начальной или конечной точкой гидросистемы (например, источник питания, сливной бак). К таким узлам примыкает только одна гидролиния и в нем требуется определить два неизвестных параметра (например, давление и скорость потока).

2 Промежуточные узлы на гидролиниях, в которых нет установленных элементов гидросистемы. В узле этого типа также требуется определить два параметра.

---

* Расчет переходных процессов гидросистем с узлами ветвления, которые не рассматриваются в данном пособии, также может быть выполнен методом характеристик. При этом общая идея алгоритма расчета аналогична той, которая используется и для расчета гидросистем без точек ветвления.

3 Парные узлы – это точки присоединения гидролиний к внутренним элементам гидросистемы (например, к гидроцилиндру, гидрораспределителю, к клапану). Так как узла, по сути дела два, то неизвестных величин в парном узле четыре.

Пусть имеется гидросистема, имеющая два узла первого типа, N узлов второго типа и M парных узлов. Следовательно, при расчете переходного процесса требуется определить $4+2N+4M$ неизвестных величин.

Для каждого узла первого типа путем использования закона сохранения массы может быть определена его характеристика, представляющая собой связь, например, между давлением и расходом в данном узле. Кроме того, для каждого из этих узлов может быть написано уравнение, связывающее параметры потока на волне F или G в зависимости от того начальной или конечной точкой системы является данный узел. Таким образом, для узла первого типа может быть составлено по два уравнения, связывающие неизвестные величины. Всего уравнений для этих узлов будет 4.

Для каждого узла второго типа может быть составлено по два соотношения, связывающих неизвестные параметры. Это соотношения на F и G волнах, приходящих в данный узел из смежных узлов, находящихся на тех же гидролиниях. Всего уравнений будет $2N$.

Характеристика парных узлов получается путем применения к жидкости, протекающей через данный узел, закона сохранения массы и закона сохранения механической энергии. Следовательно, характеристика парных узлов включает два уравнения. Еще два уравнения получаются из соотношений F и G волнах, приходящих в соответствующие узлы. Таким образом, для каждого парного узла имеем етыре уравнения, связывающих неизвестные параметры. Всего уравнений для этих узлов будет $4M$.

Из изложенного видно, что в целом для гидросистемы в каждый момент времени мы можем составить $4+2N+4M$ уравнений, а это означает, что задача расчета переходного процесса замкнутая. При этом в каждом узле хотя бы одно уравнение нестационарное, то есть либо имеет производную по времени, либо является волновым уравнением, использующим пространственно-временную координату. Это позволяет по информации о гидродинамических параметрах системы в предыдущие моменты времени находить их величины в рассматриваемый момент.

Важно подчеркнуть, что для узла каждого типа число неизвестных совпадает с числом уравнений. Это позволяет проводить расчет параметров течения рабочей жидкости для каждого узла независимо.

Таким образом, алгоритм расчета переходного процесса в гидросистеме методом характеристик включает следующие этапы.

1 С использованием законов сохранения, информации о конструктивных параметрах элементов гидросистемы, характеристик рабочей жидкости, закономерности изменения внешних воздействий составляются характеристики каждого узла системы.

2 Характеристики узлов дополняются волновыми уравнениями с формированием замкнутой системы уравнений для каждого узла.

3 Задается начальное состояние системы.

4 Полученная система уравнений решается графоаналитическим либо численным методом.

При использовании численного метода уравнения для каждого узла представляются в конечно-разностном виде и разрешаются относительно неизвестных величин на следующем временном слое при известных параметрах в предыдущий момент времени. Расчет параметров во всех узлах ведется последовательно, переходя с предыдущего временного слоя на последующий. Первым временным слоем является начальное состояние системы.

5. БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1 Емцев, Б.Т. Техническая гидромеханика: учебник для вузов / Б.Т. Емцев. - М. Машиностроение, 1987. – 463 с.

2 Калиткин, Н.Н. Численные методы / Н.Н. Калиткин. – М.: Наука, Глав. ред. физ-мат. лит., 1978. – 512 с.: ил.

3 Попов, Д.Н. Динамика и регулирование гидро- и пневмосистем: учебн. для вузов / Д.Н.Попов. – М.: Машиностроение, 1976. – 424 с.: ил.