Министерство образования и науки Российской федерации Федеральное агентство по образованию Южно-Уральский государственный университет Филиал в г. Миассе Кафедра «Гидравлика и теплотехника»

621.311.22

В.Г. Зезин

# **ГИДРОГАЗОДИНАМИКА**

Учебное пособие

Челябинск Издательство ЮУрГУ 2010

#### введение

В настоящем учебном пособии изложены основы теории гидрогазодинамики.

Приводятся общее описание физических свойств жидкостей и газов и дается понятие гипотезы сплошности среды. Приведен вывод основных уравнений равновесия, а также движения жидкостей и газов, рассмотрены решения уравнений для некоторых частных случаев. Рассмотрены модели идеальной жидкости и идеального газа, часто используемые при решении практических задач гидрогазодинамики. На базе модели одномерного течения анализируются стационарное и нестационарное движение жидкостей и газов в трубопроводах, дается физическое обоснование явления гидравлического удара.

Рассмотрены условия перехода скорости течения газа через критическую скорость звука. Приведен вывод соотношений расчета параметров газа при истечении из объемов при различных перепадах давления.

На примере анализа течений в трубопроводе рассмотрены основы теории подобия и анализа размерностей, используемые, как при проведении экспериментальных исследований, так и при теоретическом решении задач гидрогазодинамики.

Применяемый в пособии математический аппарат основан на материале курса высшей математики для технических вузов. Студент должен владеть навыками применения аппарата дифференциального и интегрального исчисления, дифференциальных уравнений. Предполагается знание студентом общей физики и теоретической механики.

При записи формул в настоящем пособии использованы следующие соглашения: переменные обозначаются, как правило, латинским шрифтом, набранные курсивом<sup>\*</sup>; математические функции и операторы обозначаются буквами латинского алфавита и набираются прямым шрифтом; векторные величины выделяются жирным шрифтом.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по специальности 140104 «Промышленная теплоэнергетика»

# 1. ОСНОВНЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

# 1.1. Молекулярная структура и особенности жидкого и газообразного состояния среды

Материальные тела могут существовать в одном из трех агрегатных состояний: твердом, жидком и газообразном. Каждое из них характеризуется определенными свойствами, которые определяются особенностями их молекулярной

<sup>\*</sup> При использовании для обозначения переменных букв русского или греческого алфавита они набираются прямым шрифтом.

структуры, связанными с силами взаимодействия между частицами. Этими силами являются силы притяжения и отталкивания, действующие одновременно и зависящие от расстояния *r* между частицами, рис. 1.1. Молекула в поле этих сил обладает потенциальной энергией  $\varepsilon$ , которая связана с величиной силы *f* уравнением d  $\varepsilon(r) = -f(r)dr$ .



Рис. 1.1. Зависимость силы взаимодействия молекул a) и потенциальной энергии молекул  $\delta$ ) от расстояния между молекулами

При некотором расстоянии  $r_0$  сила взаимодействия между молекулами равна нулю, то есть силы притяжения и отталкивания уравновешены. То есть в точке  $r_0$ потенциальная энергия достигает минимума, так как d  $\varepsilon/dr = 0$ , см. рис. 1.1.

**В твердых** (кристаллических) телах молекулы располагаются на расстояниях порядка  $r_0$ , в правильном порядке, образуя кристаллическую решетку. При этом упорядоченность молекул простирается на дальние расстояния  $r >> r_0$ . Молекулярные перемещения носят колебательный (тепловой) характер относительно устойчивых центров расположения молекул. Потенциальная энергия молекулярных связей по абсолютной величине превосходит кинетическую энергию теплового движения, что обеспечивает устойчивость расположения центров молекул и обуславливает макроскопические свойства этих тел: устойчивое сохранение объема и формы.

**В** газах при нормальных условиях межмолекулярные расстояния  $r > 10 r_0$ . Вследствие этого силы притяжения чрезвычайно низки, а потенциальная энергия взаимодействия молекул мала по сравнению с кинетической энергией их теплового движения. Модель газа, в которой полностью пренебрегается силами притяжения между молекулами, называется совершенным газом. В совершенном газе молекулы движутся равномерно и прямолинейно до столкновения. Свободное, беспорядочное движение молекул газа обуславливает его расширение во все стороны, благодаря чему газ не имеет определенного объема и формы, а принимает объем и форму сосуда, в который заключен. Стенки сосуда испытывают силовое воздействие от ударов хаотически движущихся молекул газа. Для совершенного газа величина давления *p*, то есть сила, приходящаяся на единицу площади стенки сосуда, определяется следующим соотношением кинетической теории газов

$$p = 2/3n \frac{mc^2}{2},$$
 (1.1)

где n – число молекул в единице объема; m – масса одной молекулы;  $\overline{c^2}$  – среднее значение квадрата скорости движения молекулы газа.

Произведение

$$\rho = nm, \qquad (1.2)$$

представляющее собой массу единицы объема газа, называется плотностью.

Абсолютная температура Т совершенного газа определяется формулой

$$T = \frac{2}{3k} \frac{mc^2}{2},$$
 (1.3)

где  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К – постоянная Больцмана.

Давление *p*, плотность *р* и абсолютная температура *T* являются величинами, характеризующими молекулярное движение газа. Их называют *термодинамическими параметрами состояния среды*.

Используя выражения для плотности (1.2) и температуры (1.3), выражение (1.1) можем записать в виде

$$p = \rho RT \,, \tag{1.4}$$

где R = k/m – газовая постоянная.

Соотношение (1.4) называется уравнением Клапейрона и является уравнением состояния совершенного газа.

Если к границе объема приложена сдвигающая сила, то движение молекул, оставаясь хаотическим, приобретает преимущественную направленность. То есть газы обладают свойством **текучести**, которое означает, что среда может неограниченно деформироваться под действием любой малой постоянной сдвигающей силы. Это свойство не означает отсутствия сопротивления сдвигу. Сопротивление проявляется в том, что данной силой можно вызвать только определенную скорость деформации и для ее увеличения необходимо увеличивать силу. Свойство среды сопротивляться сдвигающим усилиям называется **бязкостью** или внутренним трением. В газах вязкость обусловлена хаотическим движением молекул. Рассмотрим относительное смещение двух слоев, движущихся со скоростями *и* и  $u + \Delta u$ , рис. 1.2. Благодаря хаотическому движению происходит перемещение молекул из слоя в слой и соответствующий перенос количества движения. Это приводит к выравниванию скоростей, обусловленному появлением силы  $F_u$ .



Рис. 1.2. Молекулярный обмен количеством движения хаотически движущихся молекул

Для поддержания движения слоев с разностью скоростей  $\Delta u$  необходимо приложить внешнюю силу, преодолевающую силу сопротивления, которая называется силой вязкости или силой внутреннего трения.

Сила вязкости, приходящаяся не единицу площади поверхности раздела двух слоев, называется *вязкостным напряжением*  $\tau_{\mu}$  и определяется соотношением

$$\tau_{\mu} = \frac{F_{\mu}}{S},\tag{1.5}$$

где *S* – площадь сопротивления слоев, на которую воздействует сила внутреннего трения.

Для совершенного газа величину касательного напряжения  $\tau_{\mu}$  можно определить, применив теорему импульсов к массе молекул, пересекающих единичную площадь на плоскости раздела слоев. В результате получается зависимость

$$\tau_{\mu} = \frac{1}{3} m n \overline{c} l \left| \frac{\Delta u}{\Delta y} \right|, \qquad (1.6)$$

где  $\overline{c}$  – среднее значение абсолютной скорости молекул, l – средняя длина свободного пробега молекул.

Если обозначить

$$\mu = \frac{1}{3}mn\overline{c}l = \frac{1}{3}\rho\overline{c}l \tag{1.7}$$

- коэффициент динамической вязкости газа, то (1.6) можно записать в виде

$$\tau_{\mu} = \mu \left| \frac{\Delta u}{\Delta y} \right|. \tag{1.8}$$

Так как  $\overline{c}$  при повышении температуры возрастает, то коэффициент динамической вязкости также возрастает с увеличением температуры. При относительно низких давлениях коэффициент  $\mu$  от давления не зависит (так как входящие в (1.7) величины также не зависят от давления). При высоких давлениях, когда газы близки к сжижению, коэффициент вязкости возрастает с увеличением давления.

Жидкости по своему молекулярному строению занимают промежуточное положение между твердыми кристаллическими телами и газами. Считается, что молекулы жидкостей расположены также плотно, как и молекулы твердых тел. Об этом свидетельствует равенство плотностей твердых тел и их расплавов. Поэтому можно считать, что межмолекулярные силы и потенциальная энергия молекул имеют тот же порядок, что и для твердых тел. Жидкости, как и твердые тела, устойчиво сохраняют величину занимаемого ими объема.

Упрощенная молекулярная модель жидкости выглядит следующим образом. Тепловое движение молекул жидкости представляет собой нерегулярные колебания около некоторых центров. В определенные моменты времени кинетическая энергия некоторых молекул оказывается достаточной для преодоления межмолекулярных связей, и они скачком меняют свое положение, оказываясь в окружении других молекул, меняя тем самым центр колебаний. Таким образом, каждая молекула жидкости находится некоторое время *t*\*, называемое *временем оседлости*, в упорядоченной структуре с несколькими соседними молекулами. Совершив перескок, молекула оказывается в другой структуре, выстроенной другим образом. Поэтому *в жидкостях сохраняется только ближний порядок*. Скачки молекул совершаются хаотически, что обеспечивает диффузию молекул и текучесть жидкости. Если на границе жидкости приложена сдвигающая сила, то, как и в газах, появляется преимущественная направленность скачков и возникает течение жидкости в направлении силы.

Если время действия сдвигающей силы меньше  $t^*$ , то жидкость ведет себя, как твердое тело, оказывая упругое сопротивление сдвигу. Если время действия сдвигающей силы больше  $t^*$ , возникает течение и проявляется вязкость. Для большинства жидкостей величина силы, вызывающая движение, может быть сколь угодно малой. Однако существуют жидкости, называемые *пластичными*, с настолько упорядоченной структурой, что для осуществления сдвига необходимо приложить конечное усилие. Величина силы сопротивления может быть, как и для газов, пропорциональна скорости деформации (*ньютоновские* жидкости) или быть нелинейно связанной со скоростью деформации (*неньютоновские*<sup>\*</sup> жидкости).

Механизм сопротивления жидкости сдвигу связан с молекулярными перескоками: чем меньше происходит перескоков, тем выше вязкое сопротивление. С повышением температуры растет кинетическая энергия молекул, происходит больше перескоков, что приводит к уменьшению сопротивления сдвигу. Изменение давления слабо сказывается на вязкости жидкости.

Сложность молекулярного строения жидкостей затрудняет получение теоретических зависимостей для коэффициента вязкости, поэтому в механике жидкости используются экспериментальные данные.

В механике жидкости и газа термин «жидкость» зачастую употребляется для обозначения как жидкой, так и газообразной среды. При этом, для того чтобы подчеркнуть, что под этим термином понимается газообразная среда, делается уточнение – «*сжимаемая жидкость*». Использование такой терминологии объясняется тем, что динамика как газообразной, так и жидкой среды описывается одними и теми же уравнениями. Это, в свою очередь, является следствием использования гипотезы сплошности, применяемой при построении математических моделей механики жидкости и газа.

**Гипотеза сплошности среды.** В основе механики жидкости и газа лежат следующие предположения.

1. Справедливость классической механики Ньютона. Исследуются движения со скоростями существенно меньшими скорости света. Рассматриваются объекты, гораздо большие объектов микромира, изучаемых квантовой механикой.

<sup>\*</sup> К неньютоновским относятся и пластичные жидкости

2. Справедливость классической термодинамики. В условиях термодинамического равновесия состояние среды можно определить с помощью нескольких макроскопических параметров (например, плотности, давления, температуры).

3. Справедливость гипотезы сплошности. Механика жидкости и газа рассматриваются процессы в объемах, характерные размеры которых существенно превышают размеры молекул и межмолекулярные расстояния. По этой причине обычно жидкости и газы считаются сплошными средам, то есть средами, масса которых непрерывным образом распределена по рассматриваемому объему<sup>\*</sup>. Такая идеализация упрощает реальную дискретную систему и позволяет применить для ее описания хорошо разработанный математический аппарат исчисления бесконечно малых и непрерывных функций. Параметры состояния среды при таком подходе оказываются непрерывно распределенными по всему расчетному объему за исключением, может быть, отдельных точек, линий или поверхностей, где могут существовать разрывы. Таким образом гипотеза сплошности предполагает, что изучаемая среда заполняет рассматриваемый объем сплошь, без образования пустот. Данная гипотеза была впервые введена в науку Д'Аламбером в 1744 г. и затем Эйлером в 1753 г.

В механике жидкости и газа широко распространено понятие «жидкой частицы», под которой понимается малый объем сплошной среды, который при движении деформируется и не смешивается со средой его окружающей. При построении математической модели среды такая частица рассматривается, как материальный объект, к которому применяются законы механики. Зачастую наряду с термином «жидкая частица» для обозначения такого же объекта употребляется термин «индивидуальный элементарный объем».

#### 1.2. Плотность сплошной среды. Объемные свойства жидкостей и газов

Плотность сплошной среды р в произвольной точке *А* пространства определяется соотношением

$$\rho = \lim_{\Delta W \to 0} \frac{\Delta M}{\Delta W},\tag{1.9}$$

где  $\Delta M$  – масса, заключенная в объеме  $\Delta V$ , включающем точку A. Размерность плотности равна размерности массы, деленной на куб размерности длины, например, кг/м<sup>3</sup>.

Наряду с плотностью используется понятие удельного объема 9 - величина обратная плотности:

$$\vartheta = \frac{1}{\rho} \tag{1.10}$$

и представляющий собой объем, содержащий единицу массы.

Способность жидкости или газа под действием внешнего давления изменять свой объем (плотность) называется *сжимаемостью*. Количественно сжимаемость оценивается изотермическим коэффициентом сжимаемости β<sub>p</sub>, м<sup>2</sup>/H, характери-

<sup>&</sup>lt;sup>\*</sup> Исключение составляют сильно разреженные газы, длина свободного пробега которых соизмерима с характерным размером рассматриваемого объема.

зующим относительное изменение объема жидкости при изменении давления р на 1 Па при постоянной температуре:

$$\beta_p = -\frac{1}{9} \left( \frac{\partial 9}{\partial p} \right)_T \tag{1.11}$$

Или в интегральной форме

$$\beta_p = \frac{1}{W_1} \frac{W_1 - W_1}{p_2 - p_1} \Big|_{T = \text{const}},$$
(1.12)

где  $W_1$ ,  $W_2$  – первоначальный и конечный объемы жидкости. Для большинства жидкостей  $\beta_p = 10^{-9} \dots 10^{-10} (\text{H/m}^2)^{-1}$ . Для капельных жидкостей он уменьшается с возрастанием давления и повышением температуры.

Переходя в (1.11) к плотности можем записать

$$\beta_p = -\rho \left( \frac{\partial (1/\rho)}{\partial p} \right)_T = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T, \qquad (1.13)$$

или, обозначив  $1/\beta_p = E$ ,

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = \frac{\mathrm{d}\,p}{E}.\tag{1.14}$$

Величину Е называют модулем упругости жидкости. Соотношение (1.14) выражает закон Гука для жидкостей: напряжения, возникающие в жидкости при ее сжатии, пропорциональны относительной объемной деформации. В то же время жидкости не выдерживают даже незначительные напряжения растяжения. Напряжения растяжения в капельных жидкостях невозможны.

Для воды при нормальных условиях  $E = 2,25 \cdot 10^9 \, \text{H/m}^2 = 2250 \, \text{M}\Pi a$ .

Получим выражения для изотермического коэффициента сжатия совершенного газа, используя уравнение состояния (1.4):

$$\beta_p = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T = \frac{RT}{p} \left( \frac{\partial \frac{p}{RT}}{\partial p} \right)_T = \frac{1}{p}.$$
(1.15)

Следовательно модуль упругости совершенного газа равен

$$E = p \,. \tag{1.16}$$

Это свидетельствует о высокой сжимаемости газа.

Изменение объема сплошной среды при изменении температуры при p = constхарактеризуется коэффициентом теплового объемного расширения  $\beta_T$ 

$$\beta_T = \frac{1}{9} \left( \frac{\partial 9}{\partial t} \right)_p. \tag{1.17}$$

Как правило жидкости и газы расширяются при увеличении температуры, их плотность при этом уменьшается. Исключение составляет вода, плотность которой достигает максимума при t = 4 °C. Такая аномалия объясняется особенностями ее молекулярного строения. Для нормальных условий воды при  $\beta_T = 1.5 \cdot 10^{-4} 1/^{\circ} C.$ 

Для совершенного газа из уравнения состояния следует

$$\beta_T = \frac{1}{T}.\tag{1.18}$$

#### 1.3. Вязкость капельных жидкостей и газов

Проанализируем особенности взаимодействия реальной сплошной среды с твердым телом. Опыты показывают, что частицы сплошной среды (газа, жидкости), непосредственно примыкающие к телу, прилипают к его поверхности. Если тело покоится, то скорость прилипших частиц равна нулю<sup>\*</sup>. Если тело перемещается, то слой прилипшей среды перемещается с ним и имеет такую же скорость, как и скорость твердого тела. Эти положения позволяют следующим образом представить механизм образования вязкой силы сопротивления. Рассмотрим твердую стенку и пластинку, между которыми располагается слой жидкости. Пластинка перемещается параллельно стенке со скоростью  $u_0$ , рис. 1.3.



Рис. 1.3. К определению силы вязкости при слоистом движении жидкости

Слой жидкости, прилегающий к пластинке, перемещается вместе с ней со скоростью  $u_0$ . Вследствие молекулярных связей этот слой жидкости увлекает за собой следующий и т. д. Скорость нижнего слоя равна нулю, так как стенка неподвижна. Таким образом в жидкости возникает слоистое течение с некоторым распределением скоростей по координате *у*. Между движущимися с разными скоростями слоями возникают силы внутреннего трения, обусловленные действием межмолекулярных связей. Величина этой силы определяется следующим соотношением

$$F_{\mu} = \pm \mu S \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y},\tag{1.19}$$

где µ - коэффициент динамической вязкости; *S* – площадь соприкасающихся слоев жидкости.

Знак в формуле (1.19) выбирается таким образом, чтобы сила внутреннего трения была положительной. Сила вязкости, приходящаяся на единицу площади поверхности раздела сред, называется *вязкостным* (касательным) *напряжением*  $\tau_{\mu}$ 

$$\tau_{\mu} = \frac{F_{\mu}}{S} = \pm \mu \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}.$$
(1.20)

Уравнение (1.20) представляет собой *закон вязкостного трения Ньютона*. Эта формула в настоящее время является общепринятой при расчете напряжений трения при ламинарном (слоистом) течении жидкости и газа. Величина коэффи-

<sup>&</sup>lt;sup>\*</sup> Для сильно разреженных газов, для которых гипотеза сплошности неверна, условия «прилипания» не выполняется.

циента динамической вязкости является основной количественной характеристикой вязкости сплошной среды. Единицами измерения коэффициента динамической вязкости µ служат:

- в системе СИ  $\Pi a \cdot c = H \cdot c/m^2 = \kappa r/(c \cdot m);$
- в системе СГС г/(см·с) или пуаз (Пз);
- в технической системе кгс·с/м<sup>2</sup>.

Информация о величине коэффициента динамической вязкости некоторых веществ приведена в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Наименование веще-	Значение µ, Па·с при температуре			
ства	- 50 °C	0 °C	20 °C	50 °C
Вода	-	17,9.10 -4	$10,1 \cdot 10^{-4}$	5,49.10 -4
Ртуть	-	17,0.10 -4	$15,7{\cdot}10^{-4}$	-
Бензин		7,07.10 -4	-	-
Воздух	1,708.10 -5	1,84.10 -5	1,954.10 -5	2,18.10 -5
Водяной пар	0,883·10 <sup>-5</sup>	0,975.10 -5	1,065.10 -5	1,25.10 -5

Коэффициент динамической вязкости µ

Как уже отмечалось ранее, величина коэффициента динамической вязкости газов возрастает с увеличением температуры, а жидкостей падает, что подтверждается данными табл. 2.1. Зависимость коэффициента  $\mu$  воды от температуры *t*, °С, описывается формулой Пуазейля

$$\mu = \mu_0 \left( 1 + 0,0337t + 0,000221t^2 \right)^{-1}, \qquad (1.21)$$

где µ0 - коэффициент динамической вязкости при 0 °С.

Для расчета коэффициента µ воздуха можно воспользоваться формулой

$$\mu = (1700 + 5,58t - 0,0117t^2) 10^{-8} \Pi a \cdot c. \qquad (1.22)$$

Давление, как уже упоминалось ранее, слабо влияет на величину µ.

**Неньютоновские среды.** Напряжения вязкого трения не во всякой среде подчиняется закону Ньютона. Существуют жидкости, называемые неньютоновским, для которых закон вязкостного трения отличается от линейного. К ним относятся *дилатантные* и вязкопластичные жидкости, а также жидкости Бингма-Шведова (бингамовские). Отдельным случаем неньютоновских жидкостей являются тиксотропные и реопексные жидкости, вязкость которых изменяется с течением времени. Для дилатантных и вязкопластичных сред закон трения имеет вид

$$\mathbf{t} = \pm \mu \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right)^n,\tag{1.23}$$

где *n* > 1 – для дилатантной среды; *n* < 1 – для вязкопластичной среды.

Движение бингамовских жидкостей начинается только тогда, когда касательные напряжения превысят предел некоторого значения  $\tau_0$ . При меньших напряжениях они не обладают текучестью и ведут себя, как твердые тела, испытывая только упругие деформации. Закон вязкого трения для бингамовских жидкостей имеет вид

$$\tau = \tau_0 + \mu \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}.\tag{1.24}$$

Типичными примерами дилатантных жидкостей являются концентрированные суспензии твёрдых частиц; псевдопластических — полимерные расплавы и растворы. К бингамовской среде относятся, например, глинистые, бетонные и цементные растворы, некоторые нефтепродукты.

Вязкость жидкостей определяется экспериментально с помощью приборов, называемых вискозиметрами.

#### 1.4. Скорость звука

Величина а, определяемая зависимостью

$$a = \sqrt{\frac{\mathrm{d}\,p}{\mathrm{d}\,\rho}} \tag{1.25}$$

называется скоростью распространения звуковых (то есть малых) возмущений в данной сплошной среде. Для совершенного газа, для которого справедливо уравнение адиабаты Пуассона, имеем

$$\frac{p}{\rho^k} = \text{const,}$$
 или, дифференцируя,  $\frac{\mathrm{d}\,p}{p} = k \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}$ , (1.26)

где *k* – показатель адиабаты.

Тогда для совершенного газа получим

$$a = \sqrt{k \frac{p}{\rho}},\tag{1.27}$$

или, выражая отношение *р*/*р* при помощи уравнения состояния Клапейрона,

$$a = \sqrt{kRT} \ . \tag{1.28}$$

Скорость звука, также, как и коэффициенты  $\beta_p$  и  $\beta_T$  характеризует сжимаемость среды и имеет важное значение в теории механики жидкости и газа.

#### 1.5. Поверхностное натяжение жидкостей

Поверхность жидкости на границе с газовой фазой или с несмешивающейся жидкостью находится в состоянии равномерного *поверхностного натяжения*. Благодаря действию сил поверхностного натяжения объем жидкости, на который не действуют другие силы, принимает сферическую форму. Со свойством поверхностного натяжения связана способность жидкости образовывать капли. Поэтому *обычные жидкости называют капельными*.

Поверхностное натяжение характеризуется коэффициентом поверхностного натяжения с равным отношению величины силы поверхностного натяжения к длине образующей линии свободной поверхности. Коэффициент от зависит от природы жидкости, состояния поверхностного слоя (наличия примесей) и ее температуры. С увеличением температуры коэффициент поверхностного натяжения падает. Для воды, находящейся в соприкосновении с воздухом, при температуре 20 °C  $\sigma$  = 0,0726 Н/м. Для ртути при тех же условиях  $\sigma$  = 0,54 Н/м.

На границе между жидкостью и твердым телом возникают силы взаимодействия их молекул. Соотношение этих сил и сил взаимодействия молекул самой жидкости определяет характер граничных явлений. Если на твердую поверхность поместить каплю жидкости возможны следующие случаи: полного растекания жидкости (полное смачивание), когда краевой угол  $\theta = 0$ , частичного смачивания  $\theta < \pi/2 < \pi$ ; полного несмачивания  $\theta = \pi$ , рис. 1.4.



Рис. 1.4. Возможные случаи смачивания твердой поверхности вязкой жидкостью

Силы молекулярного взаимодействия между жидкостью стенкой создают искривление свободной поверхности вблизи стенок. Искривление свободной поверхности сопровождается появлением дополнительного давления в жидкости, которое создает подъем или опускание уровня в трубках малого диаметра, рис. 1.5.

В трубке малого диаметра поверхность может быть вогнутой (*смачивание*), например, для воды в стеклянной трубке, или вогнутой (*несмачивание*) для ртути в стеклянной трубке. При смачивающей жидкости результирующая поверхностных сил направлена наружу, а при несмачивающей – внутрь жидкости.



Рис. 1.5. Капиллярный подъем или понижение уровня в узких трубках

Высота капиллярного подъема жидкости определяется по формуле

$$h = \frac{2\sigma\cos\theta}{\rho g R},\tag{1.29}$$

где  $\theta$  - краевой угол; *R* – радиус трубки; *g* – ускорение свободного падения.

Хотя существует несмачивание, но при движении жидкости скорости частиц, соприкасающейся с твердой поверхностью, в большинстве случаев равны скорости последней.

#### 1.6. Кипение жидкостей. Кавитация

Кипением называется процесс образования пара внутри объема жидкости, то есть испарение, сопровождающееся интенсивным образованием пузырей внутри

объема жидкости, заполненных насыщенным паром. Кипение может происходить как в покоящейся, так и в движущейся жидкости в двух случаях: вследствие повышения температуры выше температуры кипения при данном давлении и в случае понижения давления до значений, меньших упругости насыщенного пара при данной температуре.

Кипение возникает почти сразу после достижения состояния насыщения, если в жидкости имеются пузырьки защемленного у стенок газа (например, воздуха) или если такие пузырьки образуются вследствие выделения газа, растворенного в жидкости. Тогда жидкость испаряется внутрь пузырьков, они растут в объеме и прорываются наружу через свободную поверхность.

Если жидкость дегазирована, то ее температура может превышать температуру насыщения при данном давлении на 10 °С и более и процесс кипения при этом не возникает. Жидкость в таком состоянии называется *перегретой*. Впоследствии перегретая жидкость все же вскипает, причем кипение начинается бурно, напоминает взрыв. Состояние перегретой жидкости неустойчивое и называется *метастабильным*. Малейшее возмущение, связанное с образованием центров испарение, приводит к интенсивному вскипанию. Аналогичная картина наблюдается и при понижении давления дегазированной жидкости ниже давления насыщения при данной температуре.

Технические жидкости, как правило, содержат растворенный газ, поэтому они вскипают при давлениях, равных давлению насыщения.

*Кипение жидкости приводит к нарушению сплошности среды*, поэтому его необходимо обязательно учитывать при использовании расчетных соотношений гидродинамики, основанных на гипотезе сплошности.

Кипение, возникающее в движущейся среде вследствие местных понижений давления, называется *кавитацией*. Кавитация может проявляться двояко:

1. В виде отдельных пузырьков, возникающих в местах пониженного давления и уносимых потоком (пузырьковая перемещающаяся кавитация).

2. В виде протяженных, значительных по объему полостей, заполненных парами жидкости, присоединенных к поверхности обтекаемых тел (*суперкавитация*).

Кавитация сопровождается характерным шумом, а при длительном ее воздействии – эрозионным разрушением металлических стенок в местах повышения давления в потоке, что приводит к быстрой конденсации внутри паровых пузырьков, их схлопыванию с образованием микро гидроударов. Механическое воздействие гидроударов усугубляется химической кислородной коррозией и воздействием электрических полей, возникающих в кавернах.

Кавитация приводит и к увеличению гидравлического сопротивления, так как кавитационные пузырьки и каверны уменьшают живое сечение потока.

Кавитация возможна как при течении жидкости в каналах, так и при внешнем обтекании тел: в полостях регулирующих клапанов, на лопастях гребных винтов, колес гидротурбин, насосов.

В качестве критерия, определяющего кавитационные свойства профилей, применяется число кавитации

$$\sigma = \frac{2(p_{\infty} - p_{\rm H})}{\rho u_{\infty}^2} = \frac{u_0^2}{u_{\infty}^2} - 1, \qquad (1.30)$$

где  $p_{\infty}$ ,  $u_{\infty}$  - давление и скорость в набегающем потоке;  $u_0$ ,  $p_{\rm H}$  – модуль скорости вблизи обтекаемого тела и давление насыщенных паров.

Последствия кавитации очень существенны для работоспособности гидрооборудования. Улучшение кавитационных свойств лопастей, то есть уменьшение является одной из важнейших задач при проектировании насосов, турбин, винтов и т. д. Примеры проявления кавитации приведены на рис. 1.6, 1.7, 1.8.



Рис. 1.6. Развитие кавитации на корабельном винте



Рис. 1.7. Кавитация на лопастях гидротурбины: *а* – внешний вид модели турбины; *б* – кавитационные пузырьки на лопастях при ее испытаниях





Рис. 1.8. Кавитирующее ядро на гидротурбине Фрэнсиса: *а* – при полной нагрузке; *б* – при частичной нагрузке

# 2. СТАТИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗОВ

#### 2.1. Общие условия равновесия. Основная теорема гидростатики

Напряженное состояние жидкостей и газов. Жидкости газы всегда подвержены действию некоторых сил. Вследствие текучести этих сред силы являются распределенными, то есть действующим во всех точках поверхности или объема. Рассмотрим силы, действующие на некоторый объем жидкой либо газовой среды. В зависимости от области приложения силы делятся на *внешние* и *внутренние*. Внешние силы приложены к выделенному объему со стороны внешней среды, внутренние – возникают в пределах рассматриваемого объема. По характеру воздействия силы классифицируются на *поверхностные* и *объемные*.

К поверхностным силам относятся силы внутреннего трения и силы давления. Они действуют лишь на поверхность выделенного объема и обусловлены действием соседних частиц жидкости или твердых тел, соприкасающихся с рассматриваемым объемом. По третьему закону Ньютона выделенный объем жидкости действует на соприкасающиеся с ним тела с такой же силой.

К объемным силам относятся силы тяжести, инерции и электромагнитные. Они пропорциональны массе выделенного элемента объема и действуют на все частицы.

Рассмотрим условия, которым должны удовлетворять поверхностные силы при равновесии жидкости. Представим некоторый объем жидкости *W*, находящийся в равновесии, рис. 2.1.



Рис. 2.1. К определению гидростатического давления

Пусть на произвольную элементарную площадку  $\Delta S$  поверхности покоящегося объема W действует сила  $\Delta \mathbf{P}$ . Покажем, что данная сила направлена по внутренней нормали к рассматриваемой площадке. Действительно, если бы сила  $\Delta \mathbf{P}$  была направлена не по нормали, то эту силу можно было бы разложить на составляющие: нормальную  $\Delta \mathbf{P}_n$  и касательную  $\Delta \mathbf{P}_s$ . Из-за текучести жидкости касательная составляющая привела бы жидкость в движение. Следовательно, для обеспечения равновесия жидкости необходимо выполнение условий

$$\Delta \mathbf{P}_{s} = 0. \tag{2.1}$$

Тогда  $\Delta \mathbf{P} = \Delta \mathbf{P}_n$ . Далее, опыты показывают, что капельная покоящаяся жидкость не сопротивляется растягивающим напряжениям, поэтому сила  $\Delta \mathbf{P}_n$  должна быть только сжимающей. Таким образом, в покоящейся жидкости действие поверхностных сил всегда направлено по внутренней нормали к площадке действия<sup>\*</sup>.

В механике жидкости и газа рассматривают единичные силы. Если рассматриваются поверхностные силы, то они относятся к единице площади поверхности, на которую девствуют, то есть  $\Delta \mathbf{P}/\Delta S$ . Предел этого отношения

$$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta S} = \mathbf{p}_n \tag{2.2}$$

называется вектором напряжения поверхностных сил в точке, к которой стягивается площадка  $\Delta S$ .

Объемные силы принято относить к единице массы жидкости. То есть, если  $\Delta \mathbf{F}$  есть объемная сила, приложенная к объему жидкости  $\Delta V$ , тогда

$$\mathbf{F} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\rho \Delta V}$$
(2.3)

и будет этой единичной объемной силой<sup>\*\*</sup>. Например, объемная сила, обусловленная действием на жидкость объемом  $\Delta V$  ускорения **a**, есть  $\mathbf{F} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\mathbf{a}\rho\Delta V}{\rho\Delta V} = \mathbf{a}$ ,

то есть равна самому вектору ускорения.

**Основная теорема гидростатики.** Гидростатическое давление в данной точке не зависит от того как ориентирована площадка, к которой принадлежит эта точка.

Выделим в покоящейся жидкости элементарный объем в форме тетраэдра и рассмотрим баланс действующих на него сил, рис. 2.2. Площади поверхности граней этого тетраэдра равны  $\frac{1}{2} dx dy$ ,  $\frac{1}{2} dx dz$ ,  $\frac{1}{2} dy dz$  а объем  $\frac{1}{6} dx dy dz$ .



Рис. 2.2. Схема действия напряжений поверхностных сил

<sup>\*</sup> Необходимо отметить, что в движущейся среде существует нормальная и касательная составляющие поверхностных сил.

<sup>\*\*</sup> По своему физическому смыслу – это плотность объемной силы.

Так как выделенный объем находится в равновесии, то сумма действующих на него внешних сил должна быть равна нулю  $\sum \mathbf{R} = 0$ . Или в проекциях на координатные оси

$$\sum R_x = 0, \ \sum R_y = 0, \ \sum R_z = 0.$$
 (2.4)

Рассмотрим подробнее проекцию суммы сил на ось х. К грани тетраэдра, перпендикулярной оси х, приложена поверхностная сила, обусловленная действием нормальных напряжений **р**<sub>*x*</sub>. Проекция на ось x этой силы равна  $dP_x = p_x ds_x = p_x \frac{1}{2} dy dz$ , где  $p_x$  – модуль вектора нормальных напряжений  $\mathbf{p}_x$ ,  $ds_x = \frac{1}{2}dydz$  – площадь поверхности этой грани. На наклонную грань тетраэдра действуют нормальные напряжения **p**<sub>n</sub>, которые обуславливают возникновение приложенной к этой грани поверхностной силы  $d\mathbf{P}_n = \mathbf{p}_n ds_n$ , где  $ds_n$  – площадь поверхности наклонной грани. Проекция этой силы на ось х может быть записана следующим образом  $-p_n ds_n \cos(\mathbf{n}, \mathbf{i})^*$ , где  $p_n$  – модуль вектора напряжений  $\mathbf{p}_n$ ,  $ds_n$  – площадь поверхности грани,  $a\cos(\mathbf{n}, \mathbf{i})$  – это косинус угла между вектором внешней нормали к площадке ds<sub>n</sub> и единичным вектором i. Будем считать, что массовые силы F, приложенные к выделенному объему, вызваны действием ускорений (например, силы тяжести и силы инерции), суммарный вектор которых обозначим а. Тогда вектор объемной силы, приложенной к выделенному тетраэдру, найдется, как  $\mathbf{a}\rho \frac{1}{6} dx dy dz$ , где  $\frac{1}{6} dx dy dz$  – объем тетраэдра. Проекция на ось x этой объемной силы будет иметь вид  $a_x \rho \frac{1}{6} dx dy dz$ , где  $a_x$ - проекция ускорения а на ось х. Таким образом, проекция на ось х суммы сил, действующих на выделенный объем, запишется следующим образом

$$p_{x}\frac{1}{2}dydz - p_{n}ds_{n}\cos(\mathbf{n},\mathbf{i}) + a_{x}\rho\frac{1}{6}dxdydz = 0.$$
(2.5)

Учитывая, что  $ds_n \cos(\mathbf{n}, \mathbf{i}) = \frac{1}{2} dy dz$ , и сокращая на dy dz, запишем (2.5) в ви-

де

$$\frac{1}{2}p_x - \frac{1}{2}p_n + a_x \rho \frac{1}{6} dx = 0.$$
(2.6)

При бесконечном уменьшении объема рассматриваемого тетраэдра и стягиванию его к началу координат  $dx \rightarrow 0$ . Окончательно получаем

$$p_x = p_n. \tag{2.7}$$

При проецировании суммы сил на другие оси получаем аналогичные соотношения. Тогда в целом можем записать

<sup>&</sup>lt;sup>\*</sup> Здесь знак минус учитывает то, что вектор внешней нормали к площадке  $ds_n$  направлен противоположно вектору **р**<sub>n</sub>.

$$p_x = p_y = p_z = p_n.$$
 (2.8)

Из (2.8) следует, что величина нормального сжимающего напряжения в любой рассматриваемой точке объема жидкости не зависит от ориентации площадки, проходящей через эту точку. Эта величина обозначается через *p* и носит название гидростатического давления.

Как видим, величина гидростатического давления в рассматриваемой точке объема жидкости не зависит от ориентации площадки, что и требовалось доказать. Конечно, гидростатическое давление, будучи одинаковым по любому направлению в рассматриваемой точке, неодинаково в различных точках пространства. В общем случае гидростатическое давление является функцией и от плотности жидкости. Но для конкретно взятой жидкости оно является функций только от координат p = f(x, y, z). Таким образом, давление – это скалярная величина.

#### 2.2. Основное уравнение гидростатики (уравнение Эйлера)

Получим дифференциальное уравнение, описывающее условия равновесия неподвижной жидкости. Для этого выделим в ней элементарный объем в форме параллелепипеда, рис. 2.3, и запишем условие равновесия для этого объема, которое заключается в равенстве нулю главного вектора внешних сил, действующих на рассматриваемый объем.



Рис. 2.3. К выводу уравнения Эйлера

Рассмотрим проекции внешних сил на ось *x*. На грань *ABCD* параллелепипеда действует сила давления, равная p d y d z, а на грань  $A_1B_1C_1D_1 - \text{сила } -p_1 d y d z^*$ , направленная в противоположную сторону. Выражая объемную силу, приложенную к параллелепипеду, через ускорение **a**, ее проекции на ось х можем записать в виде  $a_x \rho d x d y d z$ , где  $\rho$  плотность жидкости. Считая, что функция давления p = f(x, y, z) дифференцируема, представим  $p_1$  в виде

$$p_1 = p + \frac{\partial p}{\partial x} dx.$$
 (2.9)

<sup>&</sup>lt;sup>\*</sup> Размеры ребер параллелепипеда dy, dz выбраны настолько малыми, что давление в пределах каждой грани можно считать одинаковым.

Тогда проекция на ось *х* внешних сил, приложенных к рассматриваемому объему, запишется следующим образом

$$p \,\mathrm{d} \, y \,\mathrm{d} \, z - \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} \,\mathrm{d} \, x \right) \mathrm{d} \, y \,\mathrm{d} \, z + a_x \rho \,\mathrm{d} \, x \,\mathrm{d} \, y \,\mathrm{d} \, z = 0 \,. \tag{2.10}$$

Упрощая это выражение, получим

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + a_x \rho = 0.$$
 (2.11)

Условие равновесия в проекции на остальные оси будет иметь аналогичный вид

$$-\frac{\partial p}{\partial y} + a_y \rho = 0; \quad -\frac{\partial p}{\partial z} + a_z \rho = 0.$$
(2.12)

Система уравнений (2.11), (2.12) носит название системы уравнений Эйлера. Умножая первое из них на dx, второе на dy, а третье на dz и складывая, получим

$$\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz = \rho \left( a_x dx + a_y dy + a_z dz \right) = 0.$$
(2.13)

Трехчлен в левой части (2.13) представляет собой полный дифференциал давления d p, поэтому уравнение (2.13) можно записать и в виде

$$d p = \rho \left( a_x \, dx + a_y \, dy + a_z \, dz \right) = 0.$$
 (2.14)

Это уравнение называют основным уравнением статики жидкостей и газов. В общем случае оно содержит две неизвестные функции *p* и р. Поэтому для решения таких задач статики необходимо еще одно условие. В качестве такого условия используется уравнение состояния рассматриваемой среды. Например, для совершенного газа оно имеет вид

$$p = \rho RT \,, \tag{2.15}$$

а для несжимаемой жидкости

$$\rho = \text{const.}$$
 (2.16)

#### 2.3. Равновесие несжимаемой жидкости в поле силы тяжести

Применим основное уравнение статики (2.14) к случаю равновесия несжимаемой жидкости в поле силы тяжести. Имеем

$$a_x = a_y = 0, \ a_z = -g.$$
 (2.17)

Тогда (2.14) упрощается

$$\frac{\mathrm{d}\,p}{\mathrm{\rho}} = -g\,\mathrm{d}\,z\,.\tag{2.18}$$

Интегрируя (2.18), получаем

$$\frac{p}{\rho} + gz = \text{const.}$$
(2.19)

Константа интегрирования находится из граничных условий. Например, для сосуда, изображенного на рис. 2.4, в точке *A* имеем условие:  $p = p_0$ ,  $z = z_0$ .

Следовательно const =  $p_0/\rho + gz_0$ . Отсюда получим

$$\frac{p}{\rho g} + z = \frac{p_0}{\rho g} + z_0 = H .$$
 (2.20)



Рис. 2.4. К определению гидростатического напора

Постоянная величина двухчлена, обозначенная в (2.20) через *H*, называется гидростатическим напором.

Уравнение (2.20) называется основным уравнением равновесия несжимаемой жидкости в поле силы тяжести. Это уравнение можно записать и в следующем виде

$$p + \rho gz = p_0 + \rho gz_0. \tag{2.21}$$

Из уравнения (2.21) или (2.20) можно найти давление в любой точке жидкости, если известно давление *р* в некоторой точке *z*<sub>0</sub>. Действительно из (2.21) имеем

$$p = p_0 + \rho g (z_0 - z). \tag{2.22}$$

Уравнение показывает, что *при изменении внешнего давления p*<sub>0</sub> *на некоторую величину на ту же величину изменится давление в каждой точке жидкости.* Эта закономерность носит название закона Паскаля.

Уравнение (2.22) также показывает, что изобарические поверхности p = const, то есть поверхности в жидкости, на которых давление постоянно, имеют уравнение

$$z = \text{const}. \tag{2.23}$$

Следовательно, они представляют собой горизонтальные плоскости. Важно также отметить, что форма изобарических поверхностей не зависит от формы объема, в которую заключена жидкость.

Давление, определяемое формулой

$$p = p_0 + \rho g (z_0 - z) = p_0 + \rho g h, \qquad (2.24)$$

где h – глубина погружения данной точки под уровень свободной поверхности, на которой давление на свободной поверхности равно давлению окружающей среды  $p_0$ , называется *абсолютным давлением*. Абсолютное давление состоит из двух частей: давления окружающей среды  $p_0$ , которое по закону Паскаля передается всем точкам жидкости и из давления  $p_{изб} = \rho g (z_0 - z) = \rho g h$ , которое обусловлено

влиянием веса столба жидкости. Оно называется *избыточным*. Для обозначения этого давления используются также термины *манометрическое* или *пьезометрическое* давление. Таким образом, абсолютное давление равно внешнему давлению плюс избыточное

$$p_{\rm abc} = p_{\rm BH} + p_{\mu 3b}.$$
 (2.25)

Абсолютное давление не может быть меньше нуля, так как жидкость не выдерживает растягивающих напряжений. Избыточное же давление может быть как положительным, так и отрицательным. Если абсолютное давление меньше внешнего, то  $p_{\rm изб} = (p_{\rm aбc} - p_{\rm BH}) < 0$ . В этом случае разность между внешним и абсолютным давлением называют *вакуумом* или *вакуумметрическим давлением*:

$$p_{\text{BAK}} = (p_{\text{BH}} - p_{\text{abc}}) > 0.$$
 (2.26)

## 2.4. Равновесие несжимаемой жидкости в сообщающихся сосудах. Измерение давления

Рассмотрим случай равновесия двух несмешивающихся жидкостей различной плотности, находящихся в сообщающихся сосудах, рис. 2.5.



Рис. 2.5. Равновесие жидкости в сообщающихся сосудах: 0 - 0 –плоскость отсчета высот;  $\rho_1 > \rho_2$ 

Давление жидкости на поверхности раздела обозначим через *p*, тогда, согласно (2.21), можем записать

$$p = p_1 + \rho_1 g z_1 = p_2 + \rho_2 g z_2. \tag{2.27}$$

Если давления над поверхностями жидкостей равны, то есть, например,  $p_1 = p_2 = p_{ar}$ , то

$$p_{\rm at} + \rho_1 g z_1 = p_{\rm at} + \rho_2 g z_2, \qquad (2.28)$$

ИЛИ

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}.$$
 (2.29)

Таким образом, если жидкости в двух сообщающихся сосудах разнородны, то при одинаковых давлениях на свободных поверхностях высоты столбов жидкости над плоскостью раздела обратно пропорциональны их плотностям. Если плотности однородны ( $\rho_1 = \rho_2$ ), то уровни жидкостей будут находиться на одной и той же высоте  $z_1 = z_2$ . В приведенных выкладках силы молекулярного взаимодействия жидкости и стенок сосудов не учитываются. В противном случае необходимо вводить поправку на высоту капиллярного подъема (понижения)

$$h = \frac{2\sigma\cos\theta}{\rho g R},\tag{2.30}$$

где  $\theta$  - краевой угол;  $\sigma$  - коэффициент поверхностного натяжения; R – радиус сосуда.

На принципах равновесия жидкости в сообщающихся сосудах основано измерение давления. Рассмотрим несколько примеров.

1. Простейшим прибором для измерения давления является стеклянная трубка, открытая в атмосферу, называемая *пьезометром*, рис. 2.6.

Для жидкости в пьезометре, в соответствии с (2.20) можем записать

$$z_{at} + \frac{p_{at}}{\rho g} = z + \frac{p}{\rho g}; \quad p = p_{at} + \rho g (z_{at} - z); \quad p_{\mu_{35}} = \rho g (z_{at} - z).$$
(2.31)

Рис. 2.6. Схема измерения давления пьезометром

Высота  $(z_{at} - z)$  называется *пьезометрической высотой* или *пьезометриче*-

*ским напором.* Из (2.31) видно, что пьезометрический напор равен  $\frac{p_{\mu_{35}}}{\rho g}$ . Таким

образом, пользуясь пьезометром можно определить абсолютное и избыточное давление в точке присоединения трубки пьезометра к сосуду. Для исключения влияния капиллярного давления диаметр трубки пьезометра должен быть не менее 8...10 мм.

2. *Дифференциальные пьезометры* служат для измерения разности давлений. Схема такого устройства показана на рис. 2.7.



Рис. 2.7. Измерение пьезометром разности давлений

Рассмотрим случай, когда жидкости в сосудах одинаковые и требуется определить разность давлений  $p_1 - p_2$  на одной и той же высоте. Используя основную формулу гидростатики (2.21), запишем:

$$p_{1} = p_{0} + \rho g z_{1}; \quad p_{2} = p_{0} + \rho g z_{2} + \rho_{\text{возд}} g h;$$
  
$$\Delta p = p_{1} - p_{2} = \rho g (z_{1} - z_{2}) - \rho_{\text{возд}} g h; \quad \Delta p = g h (\rho - \rho_{\text{возд}}).$$
(2.32)

Подобного рода дифференциальный пьезометр будет работать при условии, что  $p_1 \le p_0 + \rho g H$ . В противном случае равновесие жидкости нарушится. Для исключения этого в верхней части пьезометра устанавливают краник для подкачки воздуха и повышения давления.

3. Применение *микроманометров* для измерения малых давлений (разрежений, разности давлений), рис. 2.8.



Рис. 2.8. Схема микроманометра

Трубка микроманометра наклонена к горизонту. Для определения  $\Delta p = p_1 - p_2$  измеряют расстояние *l*, на которое переместится столбик жидкости, что позволяет повысить чувствительность прибора и точность измерений. Из-за существенной разницы в площадях поперечных сечений трубки и бачка, изменение уровня в бачке можно не учитывать. В этом случае

$$\Delta p = \rho g l \sin \alpha \,. \tag{2.33}$$

Диаметр трубки микроманометра принимается равным 3...4 мм. При меньшей величине диаметра значительное влияние на результат измерений оказывают капиллярные силы, при большей – увеличивается погрешность отсчета, обусловленная большой протяженностью мениска.

4. Измерение вакуумметрического давления, рис. 2.9.



Рис. 2.9. Применение пьезометров для измерения вакуумметрического давления

Условие равновесия в данном случае имеет вид

$$p = p_{\rm at} - \rho g h_{\rm B}. \tag{2.34}$$

#### 2.5. Силы давления покоящейся жидкости на криволинейные поверхности

Зная распределение давления в объеме покоящейся жидкости можно определить силы, с которыми она действует на ограждающие стенки. Силовое воздействие жидкости на твердую поверхность площадью *S*, погруженную в жидкость, равно сумме воздействий элементарных сил d**F**, действующих на каждый элемент площади d*S* этой поверхности, рис. 2.10. То есть

$$\mathbf{dF} = p\mathbf{n}\mathbf{d}S,\qquad(2.35)$$

где **n** - единичный вектор нормали к элементу поверхности d S, внешней к объему жидкости; p – давление на площадке d S.

Суммируя элементарные силы, получаем главный вектор сил

$$\mathbf{F} = \int_{S} p\mathbf{n} \,\mathrm{d}\,S\,,\tag{2.36}$$

называемый силой давления жидкости на поверхность *S*. Точка приложения главного вектора сил называется *центром давления*.



Рис. 2.10. К определению главного вектора и момента сил, действующих на твердую поверхность со стороны жидкости

Главный момент сил, действующий со стороны жидкости на ту же площадку, найдется как

$$\mathbf{M} = \int_{S} p\mathbf{n} \times \mathbf{r} \,\mathrm{d}\,S\,,\tag{2.37}$$

где  $\mathbf{r}$  - радиус-вектор площадки d*S*.

Для того чтобы определить полное силовое воздействие жидкости на площадку *S* произвольной формы необходимо найти проекции сил давления  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $\underline{F_z}$  на координатные оси *x*, *y*, *z*. Если в зависимости от конфигурации стенки эти три силы пересекутся в одной точке на данной поверхности, то воздействие жидкости сводится к одной силе давления **F**. Если же проекции сил не пересекаются в точке, ледащей на поверхности, то силовое воздействие сводится к силе **F** и моменту **M**.

В общем случае сила давления **F** складывается из силы внешнего давления **P**<sub>0</sub> и силы весового давления **P**. Однако задачу определения **F** можно свести к задаче определения только силы весового давления, заменив внешнее давление давлением эквивалентного столба жидкости.

Рассмотрим криволинейную твердую поверхность *S*, ограждающую жидкость от внешней среды, рис. 2.11.

Пусть внешнее давление равно атмосферному. Тогда сила давления жидкости на твердую поверхность будет равна силе весового давления **P**, так как силы от действия атмосферного давления, приложенные в внутренней и наружной стороне рассматриваемой поверхности, взаимно уничтожаются. Найдем проекции сил весового давления  $P_x$ ,  $P_y$ ,  $P_z$  на рассматриваемую поверхность. Горизонтальная проекция силы найдется по формуле

$$P_x = \int_{S} \mathrm{d}P_x \,. \tag{2.38}$$



Рис. 2.11. К определению силы давления жидкости на твердую поверхность

Так как каждая элементарная сила давления  $d\mathbf{P}$  в покоящейся жидкости направлена по нормали **n** к элементу поверхности dS, то

$$dP_x = n_x \rho gh dS = \cos(\mathbf{n}, \mathbf{i}) \rho gh dS = \rho gh dS_x, \qquad (2.39)$$

где  $n_x$  – проекция внешней нормали **n** к элементу поверхности d *S* на ось *x*; *h* – высота столба жидкости над рассматриваемым элементом поверхности; d  $S_x$  – проекция элемента поверхности на плоскость *z*, *y* (перпендикулярную оси *x*).

Подставив (2.39) в (2.38) и учитывая, что в принятой системе координат h = z (см. рис. 2.11), получим

$$P_x = \rho g \int_{S_x} z \, \mathrm{d} S_x. \tag{2.40}$$

Интеграл  $\int_{S_x} z \, \mathrm{d} S_x$  приставляет собой статический момент площади проекции

 $S_x$  относительно оси  $y^1$ . Следовательно

$$P_x = \rho g z_{\mathrm{II,M}}^x S_x, \qquad (2.41)$$

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Величина статического момента плоской фигуры относительно некоторой оси равна произведению ее площади на координату центра масс этой фигуры относительно рассматриваемой оси.

где  $S_x$  – проекция площадки *S* на плоскость, перпендикулярную оси *x*;  $z_{q,M}^x$  - глубина расположения центра масс этой проекции.

Проекция силы весового давления на ось у найдется аналогично

$$P_{y} = \rho g z_{\text{II,M}}^{y} S_{y}. \tag{2.42}$$

Проекция силы весового давления на ось z равна

$$P_{z} = \rho g \int_{S} z \cos(\mathbf{n}, \mathbf{k}) dS = \rho g \int_{S_{z}} z dS_{z}. \qquad (2.43)$$

Интеграл  $W = \int_{S_x} z \, \mathrm{d} S_x$  приставляет собой объем криволинейного вертикально-

го цилиндра, ограниченного снизу поверхностью *S*, сверху – проекцией этой поверхности на свободную поверхность жидкости. Этот цилиндр называется телом давления, а произведение  $G = \rho g W$  есть вес тела давления.

Таким образом, для расчета силы весового давления покоящейся жидкости на криволинейную твердую поверхность необходимо руководствоваться следующими правилами.

1. Горизонтальные проекции силы весового давления жидкости  $P_i$  (i = x, y) на криволинейную твердую поверхность S равны произведению площади соответствующей проекции  $S_i$  (i = x, y) этой криволинейной поверхности на давление в центре масс данной площади проекции.

2. Вертикальная проекция силы весового давления численно равна весу тела давления  $P_z = G = \rho g W$ .

3. Горизонтальные составляющие силы  $P_i$  (i = x, y) проходят через центры давления<sup>\*</sup> соответствующих проекций, а вертикальная - через центр масс тела давления.

4. Направление вертикальной составляющей возможно вверх или вниз в зависимости от расположения жидкости относительно рассматриваемой поверхности. Если жидкость расположена над твердой поверхностью, то  $P_z$  направлена вниз, тело давления считается положительным. В противном случае  $P_z$  направлена вверх, и тело давления условно считается отрицательным.

#### 2.6. Силы давления покоящейся жидкости на плоские поверхности

Рассмотрим два частных случая действия силы давления: равномерной и неравномерной.

Сила равномерного давления на горизонтальную плоскую поверхность (p = const,  $\mathbf{n} = \text{const}$ ). Данный случай реализуется при покоящейся жидкости или при движении емкости с жидкостью вверх или вниз. В этом случае из (2.36) имеем

$$\mathbf{F} = p\mathbf{n}S, \qquad (2.44)$$

где **F** - вектор силы давления *p*; **n** – вектор внешней нормали к рассматриваемой поверхности.

<sup>\*</sup> Об определении центра давления, см. следующий раздел.

Линия действия силы проходит через центр масс площади *S*. Заметим, что сила давления на дно сосуда не зависит от формы его боковых стенок, рис. 2.12. Действительно,

$$p = p_0 + \rho g h_0;$$

$$F = \left( p_0 + \rho g h_0 \right) S_0,$$
(2.45)



Рис. 2.12. Влияние формы сосуда на силу давления

то есть сила давления равна произведению площади дна  $S_0$  на гидростатическое давление в любой из точек дна.

Сила неравномерного давления на плоскую стенку ( $p \neq \text{const}$ ; **n** = const). В этом случае система элементарных сил. d **F**, одинаковых по направлению, но различных по величине, сводятся к одной силе давления

$$\mathbf{F} = \mathbf{n} \int_{S} p \,\mathrm{d} S \,. \tag{2.46}$$

Рассмотрим плоскую стенку *AB* сосуда, наклоненную под углом  $\alpha$  к горизонту, на которой выделим площадку с площадью поверхности *S* произвольной формы, рис. 2.13, и найдем действующую на данную площадку силу давления **F**. Для большей наглядности изложения боковая стенка сосуда на рисунке развернута вместе с осью *x* вокруг оси *y* на 90 ° до совпадения с плоскостью чертежа.



Рис. 2.13. К определению силы давления жидкости на наклонную прямолинейную стенку

На элемент поверхности dS действует давление  $p = p_0 + \rho gz$ , см. рис. 2.13. Подставим эту величину в (2.46)

$$\mathbf{F} = \mathbf{n} \int_{S} (p_0 + \rho gz) dS = \mathbf{n} \left( p_0 \int_{S} dS + \rho g \int_{S} z dS \right) = \mathbf{n} \left( p_0 S + \rho g \sin \alpha \int_{S} l dS \right). \quad (2.47)$$

Последний интеграл в (2.47) представляет собой статический момент площадки *S* относительно оси *x*. Тогда справедливо равенство

$$\int_{S} l \,\mathrm{d}\,S = l_0 S \,, \tag{2.48}$$

где  $l_0$  – координата центра масс площадки *S*, отсчитываемая вдоль оси *y*. С учетом (2.48) выражение (2.47) примет вид

$$\mathbf{F} = \mathbf{n} \left( p_0 S + \rho g l_0 S \sin \alpha \right) = \mathbf{n} \left( p_0 + \rho g z_0 \right) S.$$
(2.49)

То есть полная сила давления на плоскую наклонную стенку по величине равна произведению площади этой стенки на гидростатическое давление в ее центре масс. Если давление над жидкостью равно атмосферному, то есть  $p_0 = p_{at}$ , то

$$\mathbf{F} = \mathbf{n}\rho g z_0 S \,. \tag{2.50}$$

Найдем координаты точки приложения сил давления. Для этого представим силу давления в виде суммы двух сил – силы внешнего давления и весового давления:

$$\mathbf{F} = \mathbf{P}_0 + \mathbf{P} = \mathbf{n}p_0 S + \mathbf{n}\rho g z_0 S. \qquad (2.51)$$

Так как внешнее давление  $p_0$  по закону Паскаля передается всем точкам жидкости без изменения, то равнодействующая сила  $\mathbf{P}_0$  приложена в центре масс площади *S*.

Для определения координаты точки приложения силы от весового давления применим *теорему Вариньона*, согласно которой момент от действия равнодействующей силы равен сумме моментов составляющих сил относительно той же самой оси:

$$Pl_D = \rho g \int_S lz \, \mathrm{d}S = \rho g \sin \alpha \int_S l^2 \, \mathrm{d}S \,. \tag{2.52}$$

Величина равнодействующей силы весового давления согласно (2.49) равна

$$P = \rho g z_0 S = \rho g \left( l_0 \sin \alpha \right) S.$$
(2.53)

Последний интеграл в соотношении (2.52) представляет собой момент инерции  $J_x$  площади S относительно оси x:

$$J_x = \int_{S} l^2 \,\mathrm{d}\,S \,. \tag{2.54}$$

С учетом (2.53) и (2.54) из (2.52) получаем

$$l_D = \frac{J_x}{l_0 S}.$$
(2.55)

Из теоретической механики известно, что момент инерции  $J_x$  может быть представлен в виде

$$J_x = J_0 + l_0^2 S \,, \tag{2.56}$$

где  $J_0$  – центральный момент инерции рассматриваемой площади *S* (относительно оси, проходящей через центр масс).

Подставив (2.56) в (2.55), получим

$$l_D = l_0 + \frac{J_0}{l_0 S} \,. \tag{2.57}$$

Таким образом, точка приложения равнодействующей сил весового давления **Р** на площадь *S* расположена ниже центра масс этой площади. Расстояние между ними равно

$$\Delta y = l_D - l_0 = \frac{J_0}{l_0 S}.$$
(2.58)

Если внешнее давление равно атмосферному, то точка D и будет центром давления. Если же  $p_0 > p_{\rm ar}$ , то координаты центра давления находятся по правилам механики, как координаты точки приложения суммы сил от внешнего и весового давлений:

$$\mathbf{F} = \mathbf{P}_0 + \mathbf{P} \,. \tag{2.59}$$

#### 2.7. Относительное равновесие несжимаемой жидкости

Состояние жидкости, когда она находится в покое относительно стенок сосуда, движущегося с ускорением, называется относительным равновесием. Выбирая систему координат, связанную со стенками сосуда, можно свести данную задачу к статической задаче, решение которой находится с использованием уравнений Эйлера. При переходе в движущуюся систему координат в число действующих массовых сил, в соответствии с принципом Д'Аламбера, необходимо включить силу инерции, плотность распределения которой  $\mathbf{F}_{\mu}$  численно равна ускорению рассматриваемой частицы жидкости **a**:

$$\mathbf{F}_{\mathrm{W}} = -\mathbf{a} \,. \tag{2.60}$$

Знак «--» показывает, что сила инерции направлена противоположно ускорению.

Рассмотрим два характерных случая равновесия жидкости: в сосуде, движущемся прямолинейно, и во вращающемся сосуде.

**Равновесие в сосуде, движущемся прямолинейно с постоянным ускорени**ем. Рассмотрим сосуд, движущийся по наклонной поверхности *AB* с постоянным ускорением **a**, рис. 2.14.



Рис. 2.14. Равновесие жидкости при прямолинейном равноускоренном движении

Проекции единичных массовых сил в движущейся системе координат равны

$$F_x = j - g\sin\alpha; \ F_y = -g\cos\alpha. \tag{2.61}$$

С учетом этих соотношений основное дифференциальное уравнение гидростатики (2.14) примет вид

$$d p = \rho \Big[ \big( j - g \sin \alpha \big) d x - g \cos \alpha d y \Big].$$
 (2.62)

Интегрируя (2.62), получим

$$p = \rho \Big[ \big( j - g \sin \alpha \big) x - g \cos \alpha y \Big] + C.$$
(2.63)

Константа интегрирования *C* находится из граничных условий: при x = 0 и  $y = y_0$   $p = p_0$ . Подставив граничные условия в (2.63), получим

$$C = p_0 + g \cos \alpha y_0. \tag{2.64}$$

Окончательно закон распределения давления в жидкости примет вид

$$p = p_0 + \rho (j - g \sin \alpha) x + \rho g \cos \alpha (y_0 - y).$$
(2.65)

Полагая в уравнении (2.63) *p* = const, получим уравнение изобарических поверхностей

$$\rho(j-g\sin\alpha)x-\rho g\cos\alpha y+C_1=0. \qquad (2.66)$$

Уравнение (2.66) представляет собой уравнение семейства плоскостей, параллельных оси *z*. В частности, уравнение свободной поверхности жидкости получается при  $p = p_0^*$ :

$$(j-g\sin\alpha)x-g\cos\alpha(y-y_0)=0, \qquad (2.67)$$

ИЛИ

$$y = y_0 + \frac{j - g \sin \alpha}{g \cos \alpha} x.$$
 (2.68)

Если движение сосуда происходит только под действием силы тяжести, то j = 0. . Тогда  $y = y_0 - tg \alpha$ . То есть в системе координат, связанной с землей поверхность жидкости горизонтальна.

Равновесие жидкости в сосуде, равномерно вращающемся вокруг вертикальной оси с угловой скоростью  $\omega$ , рис. 2.15. Система координат *x*, *y*, *z* связана с вращающимся сосудом.



Рис. 2.15. Равновесие жидкости во вращающемся сосуде

<sup>&</sup>lt;sup>\*</sup> Данное уравнение легко получается из (2.65) подстановкой  $p = p_0$ .

В данном случае массовой силой, кроме силы веса, является центробежная сила инерции

$$\mathbf{F}_{\mathrm{u}\delta} = \omega r^2 \mathbf{r}^0, \qquad (2.69)$$

где r – радиус рассматриваемой точки жидкости относительно оси вращения;  $\mathbf{r}^0$  - единичный вектор радиальной (вращающейся) системы координат. Проекции на оси координат результирующих массовых сил равны

$$F_x = \omega^2 r \cos\left(\mathbf{r}^0, \mathbf{i}\right) = \omega^2 x; \quad F_y = \omega^2 r \cos\left(\mathbf{r}^0, \mathbf{j}\right) = \omega^2 y; \quad F_z = -g. \quad (2.70)$$

С учетом (2.70) дифференциальное уравнение гидростатики (2.14) запишется в виде

$$d p = \rho \omega^2 x d x + \rho \omega^2 y d y - \rho g d z, \qquad (2.71)$$

которое после интегрирования примет вид

$$p = \rho \frac{\omega^2}{2} \left( x^2 + y^2 \right) - \rho g z + C.$$
 (2.72)

Константу интегрирования C найдем из условия: при x = y = 0,  $z = z_0$  и  $p = p_0$ . Тогда

$$C = p_0 + \rho g z_0. \tag{2.73}$$

Учитывая (2.73), а также то, что  $x^2 + y^2 = r^2$ , закон распределения давления в жидкости (2.72) запишем в виде

$$p = p_0 + \rho g \left( z_0 - z + \frac{\omega^2 r^2}{2g} \right).$$
 (2.74)

Приравняв в (2.74)  $p = p_0$ , получим уравнение свободной поверхности жидкости:

$$z = z_0 + \frac{\omega^2}{2g} r^2, \qquad (2.75)$$

которое представляет собой параболу. Следовательно, свободная поверхность вращающейся с постоянной угловой скоростью жидкости – параболоид вращения. Из (2.75) видно, что дробь  $\omega^2 r^2 / (2g) = h'$  представляет собой высоту, на которую поднята над вершиной параболоида точка свободной поверхности, см. Таким образом, выражение в скобках (2.74) представляет собой заглубление *h* точки *M* под свободную поверхность, см. рис. 2.15. То есть (2.74) принимает традиционный вид гидростатического (линейного) распределения давления по глубине, а сама глубина *h* в данном случае отсчитывается от свободной поверхности  $p = p_0 + \rho gh$ .

Уравнение изобарических поверхностей во вращающейся жидкости получится из (2.72), если положить p = const:

$$\rho \frac{\omega^2}{2} \left( x^2 + y^2 \right) - \rho g z + C_1 = 0.$$
(2.76)

Как видно оно представляет собой параметрическое уравнение семейства параболоидов вращения с осью *z*.

#### 2.8. Закон Архимеда. Плавание тел

Пусть тело *ABDE* полностью погружено в жидкость и находится в состоянии покоя рис. 2.16. На тело действует сила тяжести G, приложенная в точке C. Определим суммарную силу, действующую на тело со стороны жидкости.

Воздействие жидкости сводится к одной результирующей вертикальной силе, так как горизонтальная сила равна нулю. Действительно, проекции сил давления на любую из горизонтальных осей равны по величине и противоположны по знаку.



Рис. 2.16. К определению силы Архимеда

Для определения вертикальной составляющей силы выделим вертикальной цилиндрической поверхностью элемент тела, площадь которого в проекции на горизонтальную плоскость равна d $S_x$ . Вертикальная составляющая сил давления на данный элемент равна

 $dP_A = -p_1 dS_x + p_2 dS_x = -(p_0 + \rho g h_1) dS + (p_0 + \rho g h_2) dS = \rho g h_T dS$ , (2.77) где  $h_T = h_2 - h_1$  – высота элемента тела.

Интегрируя (2.77) по площади *S*<sub>x</sub>, получим следующее выражение для вертикальной силы, действующей на тело в целом

$$P_A = \int_{S_x} \rho g h_{\mathrm{T}} \,\mathrm{d}\,S_s = \rho g \int_{S_x} h_{\mathrm{T}} \,\mathrm{d}\,S_s = \rho g W_{\mathrm{T}}, \qquad (2.78)$$

где  $W_{\rm T}$  – объем тела.

Уравнение (2.78) выражает закон Архимеда: на погруженное в жидкость тело действует выталкивающая (подъемная) сила, направленная снизу вверх и равная весу жидкости в объеме тела (или его погруженной части).

Объем вытесненной телом жидкости называется *объемным водоизмещением*, а ее вес – *водоизмещением*.

Центр водоизмещения – это центр тяжести вытесненного объема жидкости.

Подъемная сила приложена к смоченной поверхности тела в точке, где эта поверхность пересекается вертикалью, проходящей через центр водоизмещения.

Выражение (2.78) для подъемной силы Архимеда можно получить и путем следующих простых рассуждений. По закону Паскаля внешнее давление передается всем точкам жидкости без изменения. Следовательно, результирующая сила,

действующая на погруженное в жидкость тело и обусловленная действием внешнего давления, будет равна нулю. Таким образом, сила Архимеда обусловлена действием только весового давления. В соответствии с разделом 2.5 на нижнюю часть *AED* погруженного в воду тела будет действовать сила весового давления  $P_2$ , равная весу тела давления *AEDNM*, направленная снизу-вверх, рис. 2.17. На верхнюю же часть *ABD* тела действует сила весового давления  $P_1$ , равная весу тела давления *ABDNM* и направленная сверху-вниз. Результирующая сила будет равна разности весов тел давления и, следовательно, она равна весу жидкости в объеме тела *W*.



Рис. 2.17. Обозначение тел давления при определении силы Архимеда.

Плаванье тел. На законе Архимеда основана теория плаванья тел. Погруженное в жидкость однородное тело с удельным весом  $\gamma$  находится под действием двух сил: силы тяжести тела в пустоте  $G = \gamma_{\rm T} W_{\rm T}$  и подъемной сила Архимеда  $P_A = \gamma_{\rm w} W \ (W_{\rm T} - {\rm o}65{\rm e}{\rm m}$  тела;  $\gamma_{\rm T}, \gamma_{\rm w}$ - удельный вес тела и жидкости соответственно).

Возможны следующие варианты поведения тела в несжимаемой жидкости.

1.  $\gamma_{\rm T} > \gamma_{\rm m}$ . Так как  $G - P_A = W_{\rm T} (\gamma_{\rm T} - \gamma_{\rm m}) > 0$ , то тело тонет.

2.  $\gamma_{\rm T} = \gamma_{\rm m}$ . Так как  $G = P_A$ , тело будет плавать внутри жидкости, сохраняя безразличное равновесие на любой глубине.

3.  $\gamma_{\rm T} < \gamma_{\rm m}$ . Так как  $G - P_A = W_{\rm T} (\gamma_{\rm T} - \gamma_{\rm m}) < 0$ , то тело всплывает и частично выйдет выше поверхности жидкости на столько, чтобы новая подъемная сила уравновесилась силой веса тела.

Для плавающего на поверхности тела выполняется условие

$$\gamma_{\rm *}W' = \gamma_{\rm T}W_{\rm T}, \qquad (2.79)$$

где W' – объем погруженной части тела.

#### 2.9. Остойчивость плавающих сил

Способность тела возвращаться в состояние равновесия после полученного крена называется остойчивостью.

Рассмотрим плавающее тело, имеющее продольную плоскость симметрии, рис. 2.18. Центр тяжести тела расположен в точке C, центр водоизмещения - в точке  $D_0$ .

Пусть тело накренилось на угол  $\varphi$ . Поскольку вес тела не изменился, то останется прежней и величина силы Архимеда  $P_A$ . Центр водоизмещения при этом переместится в новое положение  $D_1$ , а подъемная сила будет проходить через нее, оставаясь вертикальной.

Точка пересечения оси координат у с линией действия подъемной силы *М* называется *метацентром*.

Так как при плавании тела *G* < *P*<sub>A</sub>, то тело обладает остойчивостью в случае, когда метацентр расположен выше центра тяжести тела.



Рис. 2.18. Остойчивость плавающего тела

Замкнутая плоская линия пересечения плавающего тела с поверхностью жидкости называется ватерлинией. Часть плоскости, ограниченная ватерлинией называется площадью плавания (площадью грузовой ватерлинии). Расстояние  $R_M$  называется метацентрическим радиусом,  $h_M$  – метацентрической высотой. Величина  $h_M$  считается положительной, если метацентр M расположен выше центра тяжести C.

Таким образом, тело обладает остойчивостью, если  $h_M > 0$ .

#### 2.10. Равновесие газа в поле силы тяжести

В отличие от жидкости плотность газа при рассмотрении большинства задач статики и динамики не может считаться постоянной. Поэтому основное уравнение статики (2.14) для рассматриваемого случая ( $a_x = a_y = 0, a_z = -g, \rho \neq \text{const}$ ) мы должны записать в следующем виде

$$\frac{\mathrm{d}\,p}{\mathrm{\rho}g} = -\mathrm{d}\,z\,.\tag{2.80}$$

Рассмотрим два случая изменения параметров состояния газа: по изотермическому и адиабатическому закону. В первом случае, в соответствии с уравнением состояния (2.15), имеем

$$\frac{p}{\rho} = RT = \text{const} \,. \tag{2.81}$$

Во втором случае связь между давлением и плотностью имеет вид уравнения адиабаты Пуассона

$$\frac{p}{\rho^k} = \frac{p_0}{\rho_0^k} = \text{const}, \qquad (2.82)$$

где *k* – показатель адиабаты, а индексом «0» обозначены начальные параметры.

В обоих случаях плотность газа зависит только от давления. Сплошная среда, плотность которой зависит только от давления, называется баротропной.

Изотермическая атмосфера. Подставив плотность из (2.81) в (2.80) и интегрируя, получим

$$RT \int_{p_0}^{p} \frac{\mathrm{d}\,p}{p} = -g \int_{z_0}^{z} \mathrm{d}z\,, \qquad (2.83)$$

$$\ln\frac{p_0}{p} = \frac{g}{RT}(z - z_0) \quad \text{или} \quad p = p_0 \exp\left[-\frac{g}{RT}(z - z_0)\right]. \tag{2.84}$$

Как видим, в изотермической атмосфере давление убывает экспоненциально с высотой *z*. При  $z \to \infty$  давление стремится к нулю. То есть высота изотермической атмосферы бесконечна.

Адиабатическая атмосфера. Проделав операции, аналогичные рассмотренному выше случаю, получим

$$\frac{p_0^{1/k}}{\rho_0} \int_{p_0}^{p} \frac{\mathrm{d}\,p}{p^{1/k}} = -g \int_{z_0}^{z} \mathrm{d}z\,, \qquad (2.85)$$

$$\frac{p_0^{1/k}}{\rho_0} \frac{k}{k-1} \left( p^{\frac{k-1}{k}} - p_0^{\frac{k-1}{k}} \right) = -g(z-z_0), \qquad (2.86)$$

Учитывая, что  $\frac{p_0^{1/k}}{\rho_0} = \frac{p^{1/k}}{\rho}$ , последнее выражение можем записать в виде

$$\frac{k}{k-1}\left(\frac{p}{\rho} - \frac{p_0}{\rho_0}\right) = -g\left(z - z_0\right) \tag{2.87}$$

ИЛИ

$$zg + \frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho} = gz_0 + \frac{k}{k-1}\frac{p_0}{\rho_0}$$
(2.88)

или, используя уравнение состояния,

$$zg + \frac{k}{k-1}RT = gz_0 + \frac{k}{k-1}RT_0.$$
 (2.89)

Из (2.89) видно, что температура адиабатической атмосферы убывает с высотой. Найдем ее максимальную высоту, то есть высоту, при которой T = 0. Пусть  $T_0 = 289$  K, R = 287 Дж/кг K,  $z_0 = 0$ , k = 1,4. Подставив эти данные в (2.89), получим  $H = z - z_0 = 29592$  м. То есть высота адиабатической атмосферы ограничена.

### 3. ОСНОВЫ КИНЕМАТИКИ И ДИНАМИКИ ЖИДКОСТИ И ГАЗА

#### 3.1. Основные понятия и определения кинематики жидкости и газа

Движение жидкости может быть разделено на два основных вида - *установившееся* (*стационарное*) и неустановившееся (нестационарное). Движение называется установившимся, если скорости частиц жидкости, а также и другие ее параметры течения в одной и той же точке пространства не меняются со временем. Движение, не удовлетворяющее данному определению, называется неустановившимся<sup>\*</sup>.

**Линии тока.** Наглядное представление о поле скорости можно получить, если построить векторные линии, называемые линиями тока. *Линией тока* называется кривая, касательная к которой в каждой точке в рассматриваемый момент времени совпадает с вектором скорости. То есть линию тока «вычерчивают» различные частицы жидкости. Уравнение лини тока можно получить, если записать условие коллинеарности отрезка дуги линии тока ds = {dx, dy, dz} и вектора скорости  $\mathbf{u} = \{u_x, u_y, u_z\}$ , то есть условие пропорциональности соответствующих проекций векторов:

$$\frac{\mathrm{d}x}{u_x} = \frac{\mathrm{d}y}{u_y} = \frac{\mathrm{d}z}{u_z}.$$
(3.1)

Соотношение (3.1), состоящее из двух независимых дифференциальных уравнений<sup>\*\*</sup>, определяет форму линий тока. Если поле скорости нестационарно, то есть проекции скорости зависят от времени, то и форма линии тока переменна по времени t, которое в данном случае рассматривается, как параметр.

В отличие от линии тока *траектория* жидкой частицы – это линия, касательная к которой совпадает с вектором скорости данной наблюдаемой частицы в последовательные моменты времени. Каждой индивидуальной частицей в общем случае «вычерчивается» своя траектория, отличная от других. При стационарном течении линии тока и траектории совпадают.

Линии тока не могут пересекаться ни в одной точке, где скорость не равна нулю или бесконечности<sup>\*\*\*\*</sup>. Действительно, предположим обратное: две линии тока пересеклись в точке *C*, рис. 3.1. Тогда векторы  $\mathbf{u}_1$  и  $\mathbf{u}_2$  следует рассматривать, как составляющие результирующего вектора **u** в этой точке.



Рис. 3.1. К доказательству невозможности пересечения линий тока

<sup>&</sup>lt;sup>\*</sup> Примером установившегося течения является истечение струи жидкости из отверстия в резервуаре при постоянном напоре, а неустановившегося – при переменном.

<sup>\*\*</sup> Третье уравнение является их следствием.

<sup>\*\*\*</sup> Точки, где линии тока пересекаются, называются особыми точками.
Однако данный вектор **u** не касателен ни к линии тока *NC*, ни к *MC*, а значит ни одна из них не является линией тока, что противоречит исходному условию.

**Трубка тока.** Выберем в жидкости замкнутый контур *l* и проведем через каждую его точку линию тока. Получим трубчатую поверхность, рис. 3.2, которую назовем *трубкой тока*.



Рис. 3.2. К определению трубки тока

Если контур *l* мал, то трубка тока называется элементарной. В пределах поперечного сечение трубки тока распределение скоростей принимают равномерным. Очевидно, что через боковую поверхность трубки тока жидкость не протекает, так как вектора скорости касательны к ней.

Совокупность частиц, ограниченных элементарной трубкой тока, называют элементарной струйкой, а поток конечных размеров рассматривают, как совокупность элементарных струек. Таким образом, приходим к струйной модели течения.

**Расход жидкости.** Обозначим через ds площадь произвольного поперечного сечения элементарной трубки тока, см. рис. 3.2, б.  $\mathbf{n}$  – вектор нормали к данной площадке,  $\mathbf{s}$  – вектор касательной;  $\mathbf{u}$  – вектор скорости в данном сечении трубки тока. Составим скалярное произведение

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \,\mathrm{d}\, s = u_n \,\mathrm{d}\, s \,, \tag{3.2}$$

где  $u_n$  – проекция скорости на нормаль к площадке d s. Это произведение положительно, если вектора **n** и **u** образуют острый угол и отрицательно при тупом угле. Следовательно, модуль данного произведения представляет собой *объемный расход* жидкости через рассматриваемое сечение трубки тока:

$$dQ = |\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \,\mathrm{d}\, s| = |u_n \,\mathrm{d}\, s|. \tag{3.3}$$

Если *S* – площадь произвольного сечения реального потока, то величина

$$Q = \int_{S} \mathrm{d}Q = \int_{S} |\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \,\mathrm{d}S| = \int_{S} |u_n \,\mathrm{d}S|$$
(3.4)

представляет собой объемный расход жидкости через сечение S, а величины

$$dG = \rho dQ; \quad G = \iint_{S} \left| \rho u_n dS \right|$$
(3.5)

называются *массовым расходом* элементарной струйки и массовым расходом через поверхность *S* соответственно.

**Режимы движения жидкости и газа.** Наблюдения за поведением частиц жидкости при ее движении показывает, что характер движения потока может быть различным в зависимости от рода жидкости, скорости ее движения и состоя-

ния стенок, ограничивающих поток. При определенных условиях частицы движутся упорядоченно, образуя слоистое (или ламинарное<sup>\*</sup>) движение. Пример ламинарного течения при обтекании цилиндра показан на рис. 3.3 (слева). Визуализация производилась с помощью подкрашенной жидкости, вводимой в поток выше по течению.



Рис. 3.3. Примеры ламинарного (слева) и турбулентного (справа) течения жидкости

При других условиях частицы наряду с основным движением беспорядочно перемещаются из слоя в слой, их мгновенные местные скорости резко изменяются по величине и направлению. Слоистая структура разрушается, происходит пульсация параметров, характеризующих поток (перемешивание слоев). Такое движение называют турбулентным<sup>\*\*</sup>, см. рис. 3.3, где на правой фотографии показана картина течения жидкости за решеткой.

Существование двух режимов движения жидкости было обнаружено в 1839 г. Хагеном. Достаточно полные лабораторные исследования режимов движения и вопрос их влияния на характер зависимости потерь напора от скорости потока впервые исследовал английский физик О. Рейнольдс (1883 г.). Рейнольдс установил, что режим движения жидкости определяется безразмерным параметром

$$\operatorname{Re} = \frac{\rho u d}{\mu}, \qquad (3.6)$$

где  $\rho$  - плотность движущейся среды; u,  $\mu$  - ее скорость и коэффициент динамической вязкости соответственно; d – характерный размер области течения<sup>\*\*\*</sup>. Данный параметр назван числом Рейнольдса.

## 3.2. Уравнение неразрывности

Уравнение неразрывности выражает собой закон сохранения массы применительно к движущейся жидкости. При этом считается, что сплошность жидкости не нарушается, то есть жидкость движется без образования пустот, не разрываясь.

Выделим в трубке тока сечениями 1 и 2 некоторый объем жидкости, рис. 3.4, имеющий массу *m*. Применим к этому объему закон сохранения массы, который

<sup>&</sup>lt;sup>\*</sup> От лат. lamina – пластинка, полоска.

<sup>\*\*</sup> От лат. turbulentus – беспорядочный.

<sup>&</sup>lt;sup>\*\*\*\*</sup> При течении, например, в трубопроводе это будет диаметр трубопровода, при вншнем обтекании шара – диаметр шара и т. д.

при отсутствии в нем внутренних источников или стоков может быть сформулирован следующим образом: изменение массы жидкости в выделенном объеме равно разности притока жидкости в объем и оттока ее из объема.



Рис. 3.4. К выводу уравнения неразрывности

Из определения трубки тока следует, что жидкость не пересекает ее боковую поверхность. Следовательно, приток жидкости в выделенный объем будет происходить только через сечение 1, а отток – через сечение 2. Тогда считая, для простоты, сечения ортогональными векторам скорости, можем записать

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = u_1 \rho_1 s_1 - u_2 \rho_2 s_2. \tag{3.7}$$

При установившемся (стационарном) течении масса жидкости m остается неизменной, то есть dm/dt = 0. Тогда имеем

$$\rho_1 u_1 s_1 = \rho_2 u_2 s_2$$
 или  $G_1 = G_2$ . (3.8)

Таким образом, при стационарном течении уравнение неразрывности представляет собой условие постоянства массового расхода жидкости вдоль трубки тока. Для несжимаемой жидкости, то есть при ρ = const, (3.8) принимает вид

$$u_1 s_1 = u_2 s_2$$
 или  $Q_1 = Q_2$  (3.9)

и описывает условие сохранения вдоль трубки тока объемного расхода.

Если рассматривается течение в канале с поперечным сечением конечного размера, то суммируя элементарные расходы по всем трубкам тока в каждом сечении, можем записать

$$\int_{S_1} \rho_1 u_1 \, \mathrm{d} \, s_1 = \int_{S_2} \rho_2 u_2 \, \mathrm{d} \, s_2 \quad \text{или} \quad G_1 = G_2 \,, \tag{3.10}$$

а для несжимаемой жидкости

$$\int_{S_1} u_1 \, \mathrm{d} \, s_1 = \int_{S_2} u_2 \, \mathrm{d} \, s_2 \quad \text{или} \quad Q_1 = Q_2 \,. \tag{3.11}$$

Следовательно, при стационарном течении жидкости в канале ее расход в каждом сечении канала одинаков.

## 3.3. Уравнение Бернулли для трубки тока

Рассмотрим стационарное течение жидкости в трубке тока, в которой двумя сечениями выделим элементарный объем, рис. 3.5. Будем считать, что сечения располагаются настолько близко друг и другу, что кривизной осевой линии труб-

ки тока можно пренебречь. Применим к этому объему закон сохранения количества движения, который применительно к жидкой сплошной среде можно сформулировать следующим образом: изменение количества движения в выделенном объеме жидкости равно импульсу внешних объемных и поверхностных сил, приложенных к частицам, расположенным соответственно в объеме и на ограничивающей его поверхности:

$$\delta \mathbf{K} = \left(\mathbf{F}_V + \mathbf{F}_S\right) \delta t \,. \tag{3.12}$$

Будем рассматривать уравнение сохранения количества движения в проекции на ось трубки тока Ol, (см. рис. 3.5). Тогда в проекциях уравнение (3.12) можно записать следующим образом

$$\delta K = \left(F_V + F_S\right)\delta t \,. \tag{3.13}$$



Рис. 3.5. К выводу уравнения Бернулли

За промежуток времени  $\delta t$  масса жидкости, первоначально содержащаяся в этом объеме, переместится из положения 1–2 в положение 1'–2'. При этом количество движения жидкости, содержащейся между сечениями 1' и 2, не изменится, так как течение стационарное и гидродинамические параметры в каждой точке объема неизменны. Следовательно, изменение количества движения  $\delta K$  жидкости, содержащейся в выделенном объеме, будет равно разности количеств движения элементарных масс жидкости  $\delta m_1 = \rho_1 u_1 s_1 \delta t$  и  $\delta m_2 = \rho_2 u_2 s_2 \delta t$ . Так как при стационарном течении массовый расход жидкости в каждом сечении трубки тока одинаков, то  $\delta m_1 = \delta m_2 = \delta m$ . Следовательно, изменение количества движения  $\delta K$ можно представить в виде

$$\delta K = \delta m \big( u_2 - u_1 \big). \tag{3.14}$$

Будем считать, что из объемных сил имеется только сила тяжести. Тогда, учитывая, что масса выделенного объема жидкости неизменна, можем записать

$$F_V = g_l \int_{1}^{2} s \rho dl, \qquad (3.15)$$

где  $g_l$  – проекция ускорения свободного падения на ость трубки тока.

К внешним поверхностным силам относятся силы давления  $\mathbf{F}_p$  и силы вязкого сопротивления  $\mathbf{F}_{\mu}$ . Рассмотрим первую из них.

Проекция на ось трубки тока сил давления, действующих на сечения 1 и 2, запишутся, как

$$F_{p_1} = p_1 s_1, \quad F_{p_2} = -p_2 s_2. \tag{3.16}$$

Давление, действующее на боковую поверхность трубки тока, также дает проекцию силы на ось. Для ее определения примем, что давление на всей боковой поверхности постоянно и равно полусумме давлений в сечениях 1 и 2:

$$p_{1-2} = \frac{1}{2} (p_1 + p_2). \tag{3.17}$$

С учетом введенной величины давления, искомая проекция силы найдется, как

$$F_{p_{1-2}} = p_{1-2}(s_2 - s_1) = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)(s_2 - s_1).$$
(3.18)

Тогда проекция на ось трубки тока всех сил давления, действующих на выделенный объем, будет равна

$$F_{p_1} + F_{p_2} + F_{p_{1-2}} = \frac{s_1 + s_2}{2} (p_1 - p_2).$$
(3.19)

Силу вязкого сопротивления представим в виде

$$F_{\mu} = -\int_{1}^{2} \tau \sigma \, \mathrm{d}l \,, \qquad (3.20)$$

где  $\tau$  – напряжение сил вязкого сопротивления на внешней поверхности трубки тока;  $\sigma$  – периметр живого сечения трубки тока; l – координата, отсчитываемая вдоль трубки тока.

Подставляя (3.14), (3.15), (3.19), (3.20) в (3.13), получим уравнение количества движения в проекции на ость трубки тока в следующем виде

$$\delta m(u_2 - u_1) = \left[ g_l \int_{1}^{2} \rho s \, \mathrm{d}l + \frac{s_1 + s_2}{2} (p_1 - p_2) - \int_{1}^{2} \tau \sigma \, \mathrm{d}l \right] \delta t \,. \tag{3.21}$$

Разделим обе части уравнения на  $\delta t$  и перейдем в полученном уравнении к пределу при стремлении расстояния между сечениями 1 и 2 к нулю. Тогда в левой части вместо элемента массы  $\delta m = \rho s u \delta t$  будем иметь произведение  $\rho s u$ , представляющее собой расход жидкости. При бесконечном сближении сечений 1 и 2 разности  $(u_2 - u_1)$  и  $(p_2 - p_1)$  преобразуются в дифференциалы du и dp соответственно, а от интегралов останутся произведение подынтегральных функций на dl. В результате получим дифференциальную форму уравнения сохранения количества движения в проекции на ось трубки тока

$$spudu = g_l spdl - sdp - \tau\sigma dl.$$
(3.22)

Разделим обе части уравнения на  $\rho s$  и учтем, что  $u du = d(u^2/2)$ . Тогда (3.22) примет вид

$$d\left(\frac{u^2}{2}\right) = g_l dl - \frac{dp}{\rho} - \frac{\tau\sigma}{\rho s} dl. \qquad (3.23)$$

Рассмотрим подробнее первый член в правой части, который можно записать в виде  $g_l dl = g \cos \alpha dl$ , где  $\alpha$  – угол между вектором ускорения свободного падения **g** и направлением оси Ol трубки тока. Так как вектор **g** всегда противоположен по направлению к оси Oz глобальной системы координат, связанной с поверхностью земли, то  $\cos \alpha = -\cos \beta$ , где  $\beta$  – угол между направлением оси Ol трубки тока и направлением оси Oz (см. рис. 3.5). Тогда справедливо равенство

$$g_l \,\mathrm{d}l = -g \,\mathrm{d}z \,. \tag{3.24}$$

Все члены уравнения (3.23) имеют размерность удельной (то есть отнесенной к 1 кг) энергии. Обозначим последний член в правой части через  $de_{\mu}$  – дифференциал потерь удельной механической энергии на преодоление сил вязкого сопротивления.

С учетом изложенного уравнение (3.23) примет вид

$$g \,\mathrm{d} z + \frac{\mathrm{d} p}{\rho} + \mathrm{d} \left( \frac{u^2}{2} \right) = -\mathrm{d} e_{\mu}. \tag{3.25}$$

Уравнение (3.25) выполняется вдоль каждой линии тока. Оно называется уравнением Бернулли и играет фундаментальную роль в гидро- и газодинамике. По своей сути это уравнение описывает закон сохранения механической энергии жидкости. Чтобы лучше понять физический смысл уравнения, рассмотрим его отдельные частные случаи.

Несжимаемая жидкость. Проинтегрируем уравнение (3.25) вдоль линии тока от произвольного сечения 1 до сечения 2 при  $\rho$  = const:

$$g(z_2 - z_1) + \frac{p_2 - p_1}{\rho} + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} = \int_1^2 \mathrm{d}e_\mu,$$
 (3.26)

или, обозначая последний член в этом уравнении через  $\Delta e_{\mu}$  и группируя вместе члены с одинаковыми индексами,

$$gz_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{u_1^2}{2} = gz_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{u_2^2}{2} + \Delta e_{\mu}.$$
 (3.27)

Уравнение (3.27) носит название уравнения Бернулли для трубки тока при стационарном течении вязкой несжимаемой жидкости. Как видим, все члены уравнения имеют размерность энергии<sup>\*</sup> и имеют следующий смысл: gz – потенциальная энергия, обусловленная положением рассматриваемой точки жидкости относительно поверхности земли;  $p/\rho$  – потенциальная энергия, обусловленная действием в жидкости сжимающих сил давления;  $u^2/2$  – кинетическая энергия. *Трехчлен Бернулли*  $gz + p/\rho + u^2/2$  представляет собой полную энергию жидкости в рассматриваемой точке. Тогда  $\Delta e_{\mu}$  – это потери полной энергии, вызванные дей-

<sup>\*</sup> Точнее – энергии, отнесенной к единице массы жидкости.

ствием сил вязкости. Как видим, в целом уравнение описывает закон сохранения механической энергии.

В практических гидродинамических расчетах используют еще две другие формы уравнения Бернулли, отличающиеся от (3.27) размерностью их членов. В частности, если разделим все члены уравнения (3.27) на g, то они будут иметь размерность длины:

$$z_1 + \frac{p_1}{g\rho} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{g\rho} + \frac{u_2^2}{2g} + \Delta h_{\mu}.$$
(3.28)

Величина  $p/(\rho g)$  называется статическим напором; при этом если давление p измерено в избыточных единицах, то данная величина носит название *пьезометрического напора*;  $u^2/(2g) - duhamuческий или скоростной напор. Сумма трех величин <math>z + p/(\rho g) + u^2/(2g)$  есть полный напор,  $\Delta h_{\mu}$  – потери полного напора.

Умножив обе части (3.28) на *рg*, получим уравнение Бернулли, в котором все члены имеют размерность давления:

$$\rho g z_1 + p_1 + \rho \frac{u_1^2}{2} = \rho g z_2 + p_2 + \rho \frac{u_2^2}{2} + \Delta p_{\mu}.$$
(3.29)

При этом *р* носит название *статического* давления,  $\rho u^2/2 - duнамического$  или *скоростного* давления. Сумма  $p + \rho u^2/2$  есть полное давление,  $\Delta p_{\mu}$  – потери полного давления.

Баротропная среда<sup>\*</sup>. Рассмотрим две модели баротропного газа: изотермическую и адиабатическую. Используя соотношения раздела 2.10, из уравнения (3.25) после интегрирования получим:

• дли модели изотермического газа  $(p/\rho = \text{const})$ 

$$z_1 + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{u_2^2}{2g} + \Delta h_{\mu}; \qquad (3.30)$$

• дли модели адиабатического течения газа  $(p/\rho^k = \text{const})$ 

$$gz_1 + \frac{k}{k-1}\frac{p_1}{\rho_1} + \frac{u_1^2}{2} = gz_2 + \frac{k}{k-1}\frac{p_2}{\rho_2} + \frac{u_2^2}{2} + \Delta e_{\mu}.$$
 (3.31)

Все приведенные формы уравнения Бернулли находят самое широкое применение в практике гидро- и газодинамических расчетов.

# 3.4. Уравнение сохранения количества движения

Уравнение количества движения рассмотрим, используя интегральную форму его записи.

Рассмотрим участок канала, по которому движется стационарный поток жидкости, рис. 3.6. Выделим в канале сечениями  $A_1$ – $B_1$  и  $A_2$ – $B_2$  некоторый объем жид-

<sup>\*</sup> Напоминаем, что баротропной называется среда, плотность которой зависти только от давления.

кости, причем будем считать, что поверхности сечений непроницаемы, то есть перемещаются вместе с жидкостью. Предположим, для простоты, что скорость жидкости распределена однородно по площади сечений, а сами сечения ортогональны вектору скорости в данном сечении.

По аналогии с механикой твердого тела закон сохранения количества движения для жидкости формулируется следующим образом: изменение количества движения жидкости, содержащейся в некотором объеме с непроницаемыми границами равно импульсу внешних сил, действующих на данный объем.

$$\mathbf{d}\mathbf{K} = \mathbf{F}\mathbf{d}t \,. \tag{3.32}$$



Рис. 3.6. К выводу уравнения сохранения количества движения

В начальный момент жидкость занимает объем  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $A_2$ . За интервал времени dt она переместится в положение  $C_1$ ,  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $C_2$ . Количество движения жидкости, содержащейся во внутреннем объеме между сечениями  $C_1$ ,  $D_1$ ,  $B_2$ ,  $A_2$ ., не изменяется, так как течение стационарно и гидродинамические параметры в каждой его точке не изменяются. Следовательно, изменение количества движения в выделенном объеме равно разности количеств движения в элементах объема  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $D_2$ ,  $C_2$  и  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $D_1$ ,  $C_1$ . Тогда с точностью до бесконечно малых второго порядка можем записать

$$\mathbf{d}\mathbf{K} = \rho_2 s_2 u_2 \mathbf{u}_2 \,\mathbf{d}t - \rho_1 s_1 u_1 \mathbf{u}_1 \,\mathbf{d}t, \qquad (3.33)$$

где  $\rho_1 s_1 u_1 dt$ ,  $\rho_2 s_2 u_2 dt$  – масса жидкости в объемах  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $D_1$ ,  $C_1$  и  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $D_2$ ,  $C_2$  соответственно. Так как течение стационарно, то в соответствии с уравнением неразрывности массовый расход в каждом сечении канала одинаков, то есть  $\rho_1 s_1 u_1 = \rho_2 s_2 u_2 = G$ . С учетом этого равенства (3.33) примет вид

$$\mathbf{d}\mathbf{K} = (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1)G \,\mathbf{d}t \,. \tag{3.34}$$

Внешние силы, действующие на выделенный объем представим в виде суммы сил давления, приложенных к сечениям  $A_1-B_1$  и  $C_2-D_2$ , обозначим их  $\mathbf{P}_1$  и  $\mathbf{P}_2$  соответственно, и остальных внешних сил, которые обозначим одним общим слагаемым **N**. Тогда импульс сил **F**d *t* запишется в виде

$$\mathbf{F} dt = (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{N}) dt.$$
(3.35)

Подставляя (3.35) и (3.34) в (3.32) и сокращая на dt, получим

 $\left(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1\right)G = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{N}. \tag{3.36}$ 

Из этого уравнения следует, что при установившемся движении главный вектор внешних сил, приложенных к объему жидкости равен потоку количества движения через его поверхность. В данном виде уравнение сохранения количества движения находит широкое практическое применение при расчете сил, действующих со стороны потока жидкости на элементы проточной части каналов, так как в соответствии с третьим законом Ньютона сила реакции жидкости на поверхность канала **R** противоположна вектору силы **N**. Таким образом, из (3.36) следует

$$\mathbf{R} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 - (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1)G.$$
(3.37)

Уравнение (3.37) позволяет найти силу реакции жидкости на стенки канала (или находящиеся в потоке тела), если известен расход жидкости *G*, геометрия проточной части и величины давлений во входном и выходном сечении проточной части. В частности, для определения сил, действующих на тела, помещенные в поток, достаточно знать распределение скоростей по контрольной поверхности, ограничивающей рассматриваемый объем. Так как контрольную поверхность можно выбирать произвольно, то целесообразно выбрать ее таким образом, чтобы скорости на ней определялись по условию задачи.

Уравнение (3.37) векторное. Для практического использования его целесообразно спроектировать на координатные оси.

Получим теперь частную форму уравнения сохранения количества движения, которая часто используется при анализе гидрогазодинамических задач и при их практическом решении. Рассмотрим прямолинейный канал и запишем уравнение (3.36) в проекции на ось канала, считая массовые силы пренебрежимо малыми. В такой постановке из внешних сил на жидкость, располагающуюся в канале между сечениями 1 и 2, будут действовать силы давления и сила вязкого сопротивления. Силы давления приложены к плоскостям сечений 1 и 2, а также к боковой поверхности рассматриваемого объема жидкости, рис. 3.7.



Рис. 3.7. К выводу уравнения сохранения количества движения

Считая сечения 1 и 2 близко расположенными, запишем давление, действующее на боковую поверхность жидкого объема, как  $p_{1-2} = (p_1 + p_2)/2$ . Тогда, по аналогии с (3.19) проекция на ось канала всех сил давления  $F_p$  запишется в виде

$$F_p = \frac{s_1 + s_2}{2} (p_1 - p_2). \tag{3.38}$$

Силу сопротивления  $F_{\mu}$  выразим через напряжение трения т:

$$F_{\mu} = -\int_{1}^{2} \tau \sigma \,\mathrm{d}\,x\,, \qquad (3.39)$$

где сде 
<

С учетом введенных величин, а также выражения для расхода  $G = \rho_1 u_1 s_1 = \rho_2 u_2 s_2$ , уравнение сохранения количества движения (3.36) в проекции на ось канала запишется, как

$$\rho_2 u_2^2 s_2 - \rho_1 u_1^2 s_1 = \frac{s_1 + s_2}{2} (p_1 - p_2) - \int_1^2 \tau \sigma dx.$$
(3.40)

Переходя в уравнении (3.40) к пределу, аналогично тому, как это было сделано при выводе уравнения (3.22), получим дифференциальную форму уравнения сохранения количества движения для одномерного стационарного движения жидкости в прямолинейном канале

$$d(\rho u^2 s) + s d p = -\tau \sigma d x.$$
(3.41)

Учитывая, что s d p = d(sp) - p d s, (3.41) можем записать в виде

$$d\left[\left(\rho u^{2}+p\right)s\right]-p\,d\,s=-\tau\sigma d\,x.$$
(3.42)

Величина  $\rho u^2 + p$  называется полным импульсом потока. Из уравнения (3.42) следует, что при одномерном течении идеальной жидкости полный импульс потока сохраняется постоянным. Следовательно, давление в потоке может изменяться даже тогда, когда нет сил трения, и поток не выполняет механической работы. Для этого достаточно изменить скорость течения. Это может быть достигнуто, например, подводом или отводом теплоты.

С учетом уравнения неразрывности  $\rho us = \text{const}$ , уравнение (3.41) можно записать в виде

$$u \,\mathrm{d}\, u = -\frac{\mathrm{d}\,p}{\rho} - \frac{\tau\sigma}{s} \,\mathrm{d}\, x \,. \tag{3.43}$$

Из уравнения (3.43) видно, что при отсутствии сил трения ускорение потока возможно только за счет уменьшения статического давления.

## 3.5. Условия перехода скорости газа через скорость звука

Найдем условие, при котором газ может разогнаться до скорости большей скорости звука при течении по каналу переменного сечения. Рассмотрим стационарное течение идеального газа в канале переменного сечения, считая, для простоты, что газодинамические параметры зависят только от одной координаты, совпадающей с осью канала. То есть предполагаем, что в каждом из поперечных сечений газодинамические параметры распределены однородно. Уравнение неразрывности для данного случая имеет вид

$$\rho uF = \text{const},$$
 (3.44)

где *F* – площадь поперечного сечения канала. Продифференцируем это уравнение и разделим обе части на постоянную величину *риF*. В результате получим

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} + \frac{\mathrm{d}u}{u} + \frac{F}{F} = 0.$$
(3.45)

Представим первый член уравнения (3.45) в виде

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}p} \frac{\mathrm{d}p}{\rho}.$$
(3.46)

Выразим отношение  $d p / \rho$  из уравнения Бернулли (3.25). Учитывая, что для идеального газа  $d e_{\mu} = 0$  и пренебрегая потенциальной энергией «положения», получим:

$$\frac{\mathrm{d}\,p}{\rho} = -\mathrm{d}\left(\frac{u^2}{2}\right).\tag{3.47}$$

Подставим (3.47), (3.46) в (3.45) и учтем, что производная плотности по давлению равна обратной величине квадрата скорости звука, то есть  $d\rho/d p = 1/a^2$ . Тогда получим

$$-\frac{1}{a^2}d\left(\frac{u^2}{2}\right) + \frac{du}{u} + \frac{dF}{F} = 0$$
(3.48)

Или, проведя преобразования,

$$\left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right)\frac{\mathrm{d}u}{u} = -\frac{\mathrm{d}F}{F}.$$
(3.49)

Отношение скорости течения газа к местной скорости звука носит название числа Маха и обозначается через *M*:

$$M = \frac{u}{a}.$$
 (3.50)

Течения со скоростями u < a (M < 1) называются *дозвуковыми*, а при u > a (M > 1) - сверхзвуковыми. При достижении потоком скорости звука <math>M = 1 и имеет место звуковое течение.

Число Маха играет важную роль в теории газовой динамики. Оно выступает и как газодинамический параметр и может использоваться, как критерий подобия. Рассматриваемое, как критерий подобия, M показывает, какое влияние на газодинамические параметры оказывает сжимаемость среды. Если течение происходит с числами Маха $M <\sim 0,3$ , то для большинства практических задач сжимаемость можно не учитывать и для решения использовать модель идеальной жидкости.

С использованием данного параметра уравнение (3.49) примет вид

$$\left(1 - M^2\right)\frac{\mathrm{d}u}{u} = -\frac{\mathrm{d}F}{F}.$$
(3.51)

Это уравнение носит название уравнения Гюгонио, из которого, видно, что для ускорения дозвукового потока требуется уменьшать площадь сечения канала, а для ускорения сверхзвукового – увеличивать. Таким образом, для получения сверхзвукового потока канал должен иметь сужающуюся дозвуковую часть (M < 1), при этом du > 0 и поток ускоряется. В минимальном сечении скорость

потока достигает скорости звука (M = 1). В последующей расширяющейся части канала течение сверхзвуковое (M > 1) и поток продолжает ускоряться. Круглый канал такой формы называется *соплом Лаваля*.

Если где-нибудь в потоке газа скорость *u* станет равна местной скорости звука *a*, то такая скорость газа  $u = a^*$  называется критической; критическими называются и соответствующие значения  $p^*$ ,  $\rho^*$ ,  $T^*$  давления, плотности и температуры. Живое сечение потока, где скорость течения газа достигает критической скорости, называется *критическим сечением*. Поэтому минимальное сечение канала  $F^*$ называется критическим<sup>\*</sup>.

# 3.6. Основные термодинамические соотношения газовой динамики при адиабатическом течении идеального совершенного газа

Напомним, что адиабатическим является процесс, происходящий без теплообмена с окружающей средой, а идеальным называется газ, лишенный внутреннего трения. Так как внутреннее трение и теплопроводность явления одной природы – процесса молекулярного переноса, то пренебрегая трением не будем учитывать и теплопроводность в газовой фазе. Кроме того будем пренебрегать и явлениями лучистого переноса теплоты.

Совершенный газ подчиняется уравнению состояния Клапейрона, а его коэффициенты удельной теплоемкости являются константами.

Вследствие постоянства коэффициентов удельной теплоемкости удельная внутренняя (тепловая) энергия *е* и энтальпия (теплосодержание) *h* совершенного газа определяются следующими формулами

$$e = c_v T, \quad h = c_p T, \tag{3.52}$$

где T – абсолютная термодинамическая температура,  $c_v, c_p$  - коэффициенты удельной теплоемкости при постоянном объеме и давлении соответственно, которые в термодинамике определяются, как следующие частные производные

$$c_{v} = \left(\frac{\partial q}{\partial T}\right)_{v}, \quad c_{p} = \left(\frac{\partial q}{\partial T}\right)_{p},$$
(3.53)

где *q* – количество подведенной к газу теплоты.

Рассмотрим выражение для первого начала термодинамики: *подведенная к те*лу теплота идет на изменение внутренней энергии тела и совершения им работы расширения, то есть

$$\mathrm{d}q = c_v \,\mathrm{d}T + p \,\mathrm{d}\upsilon. \tag{3.54}$$

Продифференцируем (3.54) по Т при постоянном давлении

$$\left(\frac{\partial q}{\partial T}\right)_p = c_v + p \left(\frac{\partial \upsilon}{\partial T}\right)_p.$$
(3.55)

Учитывая, что  $\upsilon = 1/\rho$  и используя уравнение состояния  $p = \rho RT$ , найдем выражение для производной, входящей в правую часть (3.55)

<sup>&</sup>lt;sup>\*</sup> Употребляется также термин «горло сопла».

$$\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial T}\right)_p = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{RT}{p}\right)_p = \frac{R}{p}.$$
(3.56)

Подставив (3.56) в (3.55) и учитывая определения (3.53), получим

$$c_p - c_v = R. \tag{3.57}$$

Соотношение (3.57) называется формулой Майера.

Отношение коэффициентов удельных теплоемкостей

$$k = c_p / c_v \tag{3.58}$$

называется показателем адиабаты.

Используя приведенные соотношения, можно получить следующие зависимости между удельной внутренней энергией и энтальпией

$$h = c_p T = (c_v + R)T = c_v T + RT = e + RT = e + \frac{p}{\rho} = \frac{c_p}{c_v} c_v T = ke.$$
(3.59)

Рассмотрим еще одну термодинамическую функцию – энтропию *S*, определяемую соотношением

$$\mathrm{d}S = \frac{\mathrm{d}q}{T} \,. \tag{3.60}$$

Преобразуем (3.60), используя выражение для первого начала термодинамики и (1.26)

$$dS = \frac{c_v dT + p d(1/\rho)}{T} = c_v \frac{dT}{T} - \frac{p}{\rho T} \frac{d\rho}{\rho} = c_v \frac{d(p/\rho)}{p/\rho} - R \frac{d\rho}{\rho} =$$
$$= \frac{R}{k-1} \Big[ d\ln(p/\rho) - (k-1) d\ln\rho \Big] =$$
(3.61)
$$= \frac{R}{k-1} \Big[ d\ln p - d\ln \rho - (k-1) d\ln \rho \Big] = \frac{R}{k-1} d\ln\left(\frac{p}{\rho^k}\right).$$

Отсюда, интегрируя, получаем

$$S = \frac{R}{k-1} \ln\left(\frac{p}{\rho^k}\right) + \text{const}.$$
 (3.62)

Из (3.62) следует, что при адиабатном течении идеального газа энтропия потока остается постоянной.

#### 3.7. Уравнение сохранения энергии

Применим закон сохранения энергии к элементу массы газа в трубке тока, располагающегося в начальный момент времени между сечениями 1 и 2, рис. 3.8. Согласно первому началу термодинамики он может быть сформулирован следующим образом: изменение полной энергии рассматриваемой массы газа (внутренней бе и кинетической  $\delta e_{\kappa}$ ) за время бt равно сумме работы внешних сил  $\delta A_F$ , действующих на данную массу, и подведенной к ней тепловой энергии Qбt за вычетом технической работы  $\delta A_{\text{тех}}$ , совершаемой газом:

$$\delta e + \delta e_{\rm K} = \delta A_F + Q \delta t - \delta A_{\rm rex} \,. \tag{3.63}$$

Пусть за интервал времени  $\delta t$  рассматриваемая масса переместилась из положения 1–2 в положение 1'–2'. Так как течение стационарно, то параметры газа, располагающегося между сечениями 1' и 2 неизменны. Следовательно, изменение внутренней энергии рассматриваемой массы газа за время  $\delta t$  равно разности внутренних энергий, содержащейся в элементарной массе  $\delta m_2 = \rho_2 u_2 s_2 \delta t$  и массе  $\delta m_1 = \rho_1 u_1 s_1 \delta t$ , см. рис. 3.8. В силу уравнения неразрывности данные элементарные массы равны между собой  $\delta m_2 = \delta m_1 = \delta m$ . Тогда изменение внутренней энергии за интервал времени  $\delta t$  будет равно

$$\delta e = e_2 \rho_2 s_2 u_2 \delta t - e_1 \rho_1 s_1 u_1 \delta t = (e_2 - e_1) \delta m, \qquad (3.64)$$

где  $e_1$  и  $e_2$  – удельная внутренняя энергия газа, содержащаяся в элементарных массах  $\delta m_1$  и  $\delta m_2$  соответственно.



Рис. 3.8. К выводу уравнения сохранения энергии

Изменение кинетической энергии также будет равно разности кинетических энергий элементарных масс  $\delta m_2$  и  $\delta m_1$ , то есть

$$\delta e_{\kappa} = \rho_2 \frac{u_2^2}{2} s_2 u_2 \delta t - \rho_1 \frac{u_1^2}{2} s_1 u_1 \delta t = \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} \delta m.$$
(3.65)

Из внешних сил на рассматриваемую массу действуют сила веса, силы давления и сила сопротивления, обусловленная влиянием вязкости.

Сила веса, приложенная к массе газа, расположенной между сечениями 1' и 2, работы не совершает, так как параметры газа в этом объеме постоянны вследствие стационарности течения, и перемещение точки приложения этой силы не происходит. Таким образом, работа силы веса будет равна работе по перемещению элементарной массы  $\delta m_1$  из положения, определяемого координатой  $z_1$ , в положение, занимаемое элементарной массой  $\delta m_2$  (с координатой  $z_2$ ). Учитывая, что эти элементарные массы одинаковы, выражение для работы силы веса  $A_g$  запишем следующим образом

$$A_{g} = g\delta m(z_{1} - z_{2}) = -g\delta m(z_{2} - z_{1})$$
(3.66)

Силы давления, приложенные к боковой поверхности трубки тока, работу не совершают, так как, в соответствии с определением трубки тока, векторы скорости касательны к ее боковой поверхности. Следовательно, работа сил давления, складывается из работ сил  $F_{p1} = p_1 s_1$  и  $F_{p2} = p_2 s_2$ , действующих в сечениях 1 и 2. За интервал времени  $\delta t$  сечение 1 переместится на величину  $u_1 \delta t$ . Тогда работа силы  $F_{p1}$  равна  $\delta A_{F_{p1}} = p_1 s_1 u_1 \delta t$ . Аналогично, для работы силы  $F_{p2}$  можем записать выражение  $\delta A_{F_{p2}} = -p_2 s_2 u_2 \delta t$ . Эта работа отрицательна, так как направление действия силы противоположно перемещению. Таким образом, работа всех сил давления запишется как

$$\delta A_{F_p} = \delta A_{F_{p_1}} + \delta A_{F_{p_2}} = p_1 s_1 u_1 \delta t - p_2 s_2 u_2 \delta t = \left( p_1 s_1 u_1 \frac{\rho_1}{\rho_1} - p_2 s_2 u_2 \frac{\rho_2}{\rho_2} \right) \delta t = \left( \rho_1 u_1 s_1 \frac{p_1}{\rho_1} - \rho_2 u_2 s_2 \frac{p_2}{\rho_2} \right) \delta t = G\left( \frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} \right) \delta t.$$
(3.67)

Работу по преодолению сил вязкого сопротивления обозначим через  $-\delta A_{\mu}^{*}$ , а техническую работу, совершаемую газом, – через  $-\delta A_{\text{rex}}$ .

Если обозначить поток теплоты, поступающий к рассматриваемой массе газа через  $Q_{\Sigma}$ , то за интервал времени  $\delta t$  к массе выделенного газа поступит тепловая энергия  $Q_{\Sigma} \delta t$ .

Подставляя полученные выражения в (3.63), будем иметь

$$(e_{2} - e_{1})\delta m + \frac{u_{2}^{2} - u_{1}^{2}}{2}\delta m =$$

$$= \left(\frac{p_{1}}{\rho_{1}} - \frac{p_{2}}{\rho_{2}}\right)\delta m - g(z_{2} - z_{1})\delta m - \delta A_{\mu} - \delta A_{rex} + Q_{\Sigma}\delta t$$
(3.68)

Деля обе части уравнения на б*т* и группируя члены с одинаковыми индексами, получим

$$gz_1 + e_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{u_1^2}{2} + \delta q_{\Sigma} = gz_2 + e_2 + \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{u_2^2}{2} + \delta e_{\mu} + \delta e_{\text{rex}}, \qquad (3.69)$$

где  $\delta e_{\mu} = \delta A_{\mu} / \delta m$  – удельные (отнесенные к 1 кг) затраты энергии на преодоление сил вязкого сопротивления;  $\delta q_{\Sigma} = \frac{Q \delta t}{\delta m}$  – удельное количество тепловой энергии, подведенное к рассматриваемой массе газа на участке от сечения 1 до сечения 2. Тепловая энергия, подведенная к нашей массе газа  $\delta q_{\Sigma}$ , включает теплоту, поступающую к ней извне через боковую поверхность, ограничивающую трубку тока  $\delta q$  и внутреннюю  $\delta q_{\rm BH}$ , выделяющуюся в результате перехода в теплоту работы, совершаемой газом при преодолении сил вязкого сопротивления. Поэтому очевидно, что

$$\delta q_{\rm BH} = \delta e_{\mu}. \tag{3.70}$$

<sup>\*</sup> Знак минус указывает на то, что данная работа отрицательна, то есть совершается газом.

С учетом последнего равенства уравнение сохранения энергии запишется следующим образом

$$gz_1 + e_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{u_1^2}{2} + \delta q = gz_2 + e_2 + \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{u_2^2}{2} + \delta e_{\text{rex}}.$$
 (3.71)

Дифференциальная форма уравнения (3.71) может быть получена путем рассуждений, аналогичных проведенным при выводе уравнения Бернулли (см. раздел 3.3) и имеет вид

$$g \operatorname{d} z + \operatorname{d} e + \operatorname{d} \left( \frac{u^2}{2} \right) + \operatorname{d} \left( \frac{p}{\rho} \right) = \operatorname{d} q - \operatorname{d} e_{\operatorname{rex}}.$$
 (3.72)

Рассмотрим несколько частных случаев уравнения сохранения энергии.

**Уравнение теплосодержания.** Используя соотношение (3.59), связывающее энтальпию газа с его внутренней энергией, перепишем уравнение (3.71) в виде

$$gz_1 + h_1 + \frac{u_1^2}{2} + \delta q = gz_2 + h_2 + \frac{u_2^2}{2} - \delta e_{\text{rex}}.$$
 (3.73)

Уравнение (3.73) носит название уравнения теплосодержания. Существенно то обстоятельство, что уравнение теплосодержания не содержит работы трения. В самом деле, поскольку энергия, расходуемая на преодоление трения или любого другого вида сопротивления, преобразуется полностью в тепло, а последнее остается в газовой струе, наличие сил трения не может нарушить общий баланс энергии, а лишь приводит к преобразованию одного вида энергии в другой.

Обычно в технике приходится иметь дело с частными формами уравнения теплосодержания. Так, в большинстве случаев изменение потенциальной энергии положения пренебрежимо мало в сравнении с другими частями уравнения энергии, поэтому членами  $gz_1$  и  $gz_2$  пренебрегают. Тогда уравнение теплосодержания примет следующий вид

$$h_2 - h_1 + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} = \delta q - \delta e_{\text{rex}}.$$
(3.74)

Как уже отмечалось выше, уравнение теплосодержания справедливо вне зависимости от того, учитываются или нет силы трения. Отсутствие влияния сил трения можно объяснить следующим образом. Под действием трения давление вдоль канала падает, то есть газ расширяется, и, следовательно, температура должна была бы уменьшаться. Однако работа сил трения преобразуется в тепло; и так как работа сил трения в точности равна теплу, подведенному за счет этой работы, то подогрев компенсирует охлаждение.

Если можно пренебречь теплообменом и изменением скорости потока, тогда изменение теплосодержания затрачивается на совершение механической работы:

 $h_2 - h_1 = -\delta e_{\text{тех}}$  или  $T_2 - T_1 = -\delta e_{\text{тех}} / c_p$ . (3.75) То есть, например, в колесе турбины температура газа уменьшается ( $\delta e_{\text{тех}} > 0$ ), а в колесе компрессора температура возрастает ( $\delta e_{\text{тех}} < 0$ ).

Если течение адиабатическое ( $\delta q = 0$ ), и техническая работа не совершается ( $\delta e_{\text{тех}} = 0$ ) то (3.74) принимает вид

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2} = \text{const}$$
 или  $\frac{u_2^2 - u_1^2}{2} = h_1 - h_2.$  (3.76)

То есть изменение теплосодержания (температуры) в энергетически изолированном процессе связано только с изменением скорости. Если скорость газа не меняется, то остается постоянной и температура.

Рассмотрим уравнение сохранения энергии для адиабатного течения в дифференциальной форме

$$\mathrm{d}h + \mathrm{d}\left(\frac{u^2}{2}\right) = 0. \tag{3.77}$$

Для исключения из этого уравнения скорости вычтем из него уравнение Бернулли, которое для рассматриваемого случая имеет вид

$$d\left(\frac{u^2}{2}\right) + \frac{dp}{\rho} = 0.$$
(3.78)

В результате получим

$$\mathrm{d}h = \frac{\mathrm{d}p}{\rho}.\tag{3.79}$$

Используя термодинамические функции, приведенные в разделе 3.6, и уравнение состояния, преобразуем левую часть последнего уравнения

$$dh = c_p dT = \frac{c_p}{R} d(RT) = \frac{c_p / c_v}{(c_p - c_v) / c_v} d\left(\frac{p}{\rho}\right) = \frac{k}{k - 1} d\left(\frac{p}{\rho}\right).$$
(3.80)

Подставив (3.80) в (3.79), получим

$$\frac{\mathrm{d}p}{\rho} = \frac{k}{k-1} \mathrm{d}\left(\frac{p}{\rho}\right) = \frac{k}{k-1} \left(\frac{\mathrm{d}p}{\rho} - \frac{p}{\rho^2} \mathrm{d}\rho\right)$$
(3.81)

или

$$\frac{\mathrm{d}\,p}{p} = k \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}.\tag{3.82}$$

Интегрируя (3.82) получаем известную адиабату Пуассона

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^k, \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/k}.$$
(3.83)

То есть при адиабатном движении идеального газа отношение  $p/\rho^k$  остается постоянным вдоль линии тока. Из этого, в соответствии с (3.62), следует, что при таком течении энтропия также постоянна вдоль линии тока.

#### 3.8. Уравнение Бернули

Вычтем почленно из уравнения сохранения энергии (3.72) уравнение первого закона термодинамики  $dq_{\Sigma} = de + pd(1/\rho)$  и учтем, что  $dq_{\Sigma} = dq + dq_{BH}$ . То есть то, что суммарная тепловая энергия включает теплоту, поступающую к ней извне, и внутреннюю, выделяющуюся в результате перехода в теплоту работы, совер-

шаемой газом при преодолении сил вязкого сопротивления. То есть  $dq_{\rm BH} = de_{\mu}$ . В результат получим

$$g \,\mathrm{d} z + \mathrm{d} \left( \frac{u^2}{2} \right) + \frac{\mathrm{d} p}{\rho} = -\mathrm{d} e_{\mu} - \mathrm{d} e_{\mathrm{Tex}} \,.$$
 (3.84)

Уравнение (3.84) называется уравнением Бернулли и выражает закон сохранения механической энергии потока. Для того, чтобы лучше понять физический смысл данного уравнения, проинтегрируем его вдоль трубки тока от сечения 1 до сечения 2

$$g(z_2 - z_1) + \frac{u_2^2}{2} - \frac{u_1^2}{2} + \int_1^2 \frac{\mathrm{d}\,p}{\rho} = -\int_1^2 \mathrm{d}\,e_\mu - \int_1^2 \mathrm{d}\,e_{\mathrm{Tex}} \,. \tag{3.85}$$

Рассмотрим интеграл в левой части (3.85). Если движущаяся среда баротропная, то есть ее плотность зависит только от давления, то данный может быть вычислен. В частности для адиабатического течения совершенного газа имеем  $\rho = Cp^{1/k}$ , где C – константа. Тогда

$$\int_{1}^{2} \frac{\mathrm{d}\,p}{\rho} = \frac{1}{C} \int_{1}^{2} \frac{\mathrm{d}\,p}{p^{1/k}} = \frac{1}{C} \frac{k}{k-1} \left( p_{2}^{\frac{k-1}{k}} - p_{1}^{\frac{k-1}{k}} \right) = \frac{k}{k-1} \left( \frac{p_{2}}{\rho_{2}} - \frac{p_{1}}{\rho_{1}} \right).$$
(3.86)

Здесь учтено, что в соответствии с уравнением адиабаты  $C = \rho_1 / p_1^{1/k} = \rho_2 / p_2^{1/k}$ .

Для модели изотермического газа  $\rho = p / (RT)$ , можем записать

$$\int_{1}^{2} \frac{\mathrm{d} p}{\rho} = RT \int_{1}^{2} \frac{\mathrm{d} p}{p} = RT \left( \ln p_{2} - \ln p_{1} \right).$$
(3.87)

Для несжимаемой жидкости получим

$$\int_{1}^{2} \frac{\mathrm{d}p}{\rho} = \frac{1}{\rho} \int_{1}^{2} \mathrm{d}p = \frac{1}{\rho} (p_{2} - p_{1}).$$
(3.88)

Первый и второй интегралы в правой части (3.85) представляют собой потери энергии потока на преодоление сил вязкого сопротивления и на совершение внешней технической работы. Обозначим их через  $\Delta e_{\mu}$  и  $\Delta e_{\text{тех}}$  соответственно. С учетом проделанных вычислений и введенных обозначений уравнение (3.85) примет вид:

• для модели несжимаемой жидкости

$$gz_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{u_1^2}{2} = gz_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{u_2^2}{2} + \Delta e_{\mu} + \Delta e_{\text{rex}}; \qquad (3.89)$$

• дли модели изотермического газа  $(p/\rho = \text{const})$ 

$$gz_1 + RT \ln p_1 + \frac{u_1^2}{2} = gz_2 + RT \ln p_2 + \frac{u_2^2}{2} + \Delta e_{\mu} + \Delta e_{\text{rex}};$$
 (3.90)

• дли модели адиабатического течения газа  $\left( p / \rho^k = \text{const} \right)$ 

$$gz_1 + \frac{k}{k-1}\frac{p_1}{\rho_1} + \frac{u_1^2}{2} = gz_2 + \frac{k}{k-1}\frac{p_2}{\rho_2} + \frac{u_2^2}{2} + \Delta e_{\mu} + \Delta e_{\text{rex}}.$$
 (3.91)

Анализируя полученные уравнения (3.89)...(3.91) можно отметить, что каждое из слагаемых представляет собой одну из составляющих удельной (отнесенной к единице массы) механической энергии потока. В частности в модели несжимаемой жидкости:  $g_z$  – потенциальная энергия положения;  $p/\rho$  – потенциальная энергия, обусловленная действием в жидкости сжимающих сил давления;  $u^2/2$  – кинетическая энергия. Последняя величина может быть как положительной, когда поток затрачивает энергию на совершение внешней технической работы, например, на привод турбины, так и отрицательной, когда внешние устройства, например насос, совершают работу, увеличивая механическую энергию потока. *Трехчлен Бернулли*  $g_z + p/\rho + u^2/2$  представляет собой полную энергию жидкости в рассматриваемой точке. Тогда  $\Delta e_{\mu}$  и  $\Delta e_{\text{тех}}$  – потери полной механической энергию.

В практических гидродинамических расчетах используют еще две другие формы уравнения Бернулли, отличающиеся от (3.91) размерностью их членов. В частности, если разделим все члены уравнения (3.91) на g, то они будут иметь размерность длины:

$$z_1 + \frac{p_1}{g\rho} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{g\rho} + \frac{u_2^2}{2g} + \Delta h_{\mu} + \Delta h_{\text{rex}}.$$
 (3.92)

Величина  $p/(\rho g)$  называется статическим напором; при этом если давление p измерено в избыточных единицах, то данная величина носит название *пьезомет*рического напора;  $u^2/(2g) - duhamuческий$  или скоростной напор. Сумма трех величин  $z + p/(\rho g) + u^2/(2g)$  есть полный напор,  $\Delta h_{\mu}$  – потери полного напора.

Умножив обе части (3.92) на *рg*, получим уравнение Бернулли, в котором все члены имеют размерность давления:

$$\rho g z_1 + p_1 + \rho \frac{u_1^2}{2} = \rho g z_2 + p_2 + \rho \frac{u_2^2}{2} + \Delta p_{\mu} + \Delta p_{\text{tex}}.$$
 (3.93)

При этом *р* носит название *статического* давления,  $\rho u^2/2 - duнамического$  или *скоростного* давления. Сумма  $p + \rho u^2/2$  есть полное давление,  $\Delta p_{\mu}$  – потери полного давления.

Аналогичный энергетический смысл имеют слагаемые уравнения Бернулли и в модели баротропного и изотермического совершенного газа.

# 3.9. Параметры торможения. Газодинамические функции

Из (3.76) видно, что если газовую струю полностью затормозить, то теплосодержание достигнет максимального значения

$$h_0 = h + \frac{u^2}{2}, \tag{3.94}$$

которое называют *полным теплосодержанием*. Соответствующую температуру газа<sup>\*</sup>

$$T_0 = \frac{h_0}{c_p} \tag{3.95}$$

называют температурой торможения (или температурой адиабатически заторможенного потока). Температуру движущегося потока называют статической температурой. Температура торможения выражается через статическую температуру потока формулой, следующей из (3.94) и (3.52)

$$T_0 = T + \frac{u^2}{2c_p}.$$
 (3.96)

Преобразуем (3.96) с использованием формулы Майера (3.57):

$$T_{0} = T + \frac{u^{2}}{2c_{p}} \frac{R}{R} \frac{c_{v}}{c_{v}} = T + \frac{u^{2}}{2c_{p}} \frac{c_{p} - c_{v}}{R} \frac{c_{v}}{c_{v}} = T + \frac{c_{p} - c_{v}}{2c_{v}} \frac{u^{2}}{c_{p} / c_{v} R} =$$

$$= T \left( 1 + \frac{k - 1}{2} \frac{u^{2}}{kRT} \right) = T \left( 1 + \frac{k - 1}{2} \frac{u^{2}}{a^{2}} \right),$$
(3.97)

где а- скорость звука в рассматриваемой точке потока.

С использованием ранее введенного числа Маха (см. (3.50)), формула (3.97) может быть представлена в виде

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2}M^2.$$
(3.98)

Используя уравнение адиабаты:  $\rho_0 / \rho = (T_0 / T)^{1/(k-1)}$ ,  $p_0 / p = (T_0 / T)^{k/(k-1)}$  можно получить следующие выражения для определения *адиабатически затормо*женной плотности  $\rho_0$  и давления  $p_0$  через соответствующие статические параметры и число Маха:

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)^{\frac{1}{k-1}}, \quad \frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)^{\frac{k}{k-1}}.$$
(3.99)

Относительные функции

$$\tau(M) = \frac{T}{T_0} = \left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)^{-1}, \quad \varepsilon(M) = \frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)^{-\frac{1}{k-1}}, \quad (3.100)$$

$$\pi(M) = \frac{p}{p_0} = \left(1 + \frac{k - 1}{2}M^2\right)^{-\frac{k}{k - 1}}, \qquad (3.101)$$

устанавливающие связь между текущими (статическими) параметрами потока и параметрами в состоянии торможения называются *газодинамическими функциями* адиабатического, изоэнтропического течения. Они затабулированы в функции

<sup>\*</sup> Теплосодержание связано с температурой формулой (3.52).

числа Маха и широко применяются в практике инженерных расчетов газовых течений<sup>\*</sup>.

Интересно отметить, что в изоэнтропических формулах (3.99) содержатся, как частный случай при M = 0 формулы несжимаемой жидкости:

$$\rho = \rho_0 \quad \text{i} \quad p + \frac{u^2}{2} = p_0. \tag{3.102}$$

Для того, чтобы показать это необходимо разложить правые части (3.99), в степенные ряды при малых M. То есть число Маха может являться мерой сжимаемости движущейся среды. Так, если допустить ошибку от неучета сжимаемости 1 %, то число Маха в потоке не должно превышать  $M \le 0,14$ . Таким образом, течение газа с невысокими скоростями можно рассматривать, как течение несжимаемой жидкости.

Поскольку скорость потока может быть как выше, так и ниже скорости звука, существует и такой режим, когда скорость потока равна скорости звука, то есть M = 1. Этот режим называется критическим. Ему соответствует значение температуры в потоке

$$T^* = \tau(1)T_0 = T_0 \left(1 + \frac{k-1}{2}\right)^{-1} = T_0 \frac{2}{k+1}.$$
(3.103)

Само значение скорости звука критического режима отличается от скорости звука в заторможенном газе

$$\frac{a^*}{a_0} = \sqrt{\frac{T^*}{T_0}} = \sqrt{\frac{2}{k+1}},$$
(3.104)

откуда

$$a^* = \sqrt{\frac{2k}{k+1}RT_0} \,. \tag{3.105}$$

Можно охарактеризовать степень преобразования теплосодержания в кинетическую энергию еще одним способом, поделив тепловой перепад на теплосодержание при критическом режиме, то есть

$$\frac{T_0 - T}{T^*} = \frac{h_0 - h}{h^*} = \frac{u^2/2}{c_p T^*} = \frac{u^2/2}{c_p T^* \frac{kR}{kR}} = \frac{u^2/2}{\left(a^*\right)^2 \frac{c_p}{k(c_p - c_v)}} = \frac{u^2}{\left(a^*\right)^2} \frac{k - 1}{2}.$$
 (3.106)

Отсюда находим отношение  $T/T_0$ 

$$\frac{T}{T_0} = 1 - \frac{k - 1}{k + 1} \frac{u^2}{\left(a^*\right)^2}.$$
(3.107)

Отношение скорости потока *и* к критической скорости звука *a*<sup>\*</sup> называется *приведенной скоростью* или *скоростным коэффициентом*<sup>\*</sup>:

<sup>&</sup>lt;sup>\*</sup> Кроме перечисленных имеется широкий набор других, дополнительных газодинамических функций, расширяющих возможности расчетной оценки параметров газовых потоков.

$$\lambda = \frac{u}{a_{\rm kp}}.\tag{3.108}$$

С учетом введенного параметра  $\lambda$  формула (3.107) примет вид

$$\frac{T}{T_0} = 1 - \frac{k - 1}{k + 1} \lambda^2 = \tau(\lambda).$$
(3.109)

Из (3.109) следует, что при максимальном расширении газа, когда T = 0, скоростной коэффициент принимает максимальное значение

$$\lambda_{\max} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \,. \tag{3.110}$$

Величина  $\lambda_{\text{nax}}$  позволяет найти максимальную скорость потока, достижимую при расширении до вакуума (p = 0) в сопле Лаваля. Вспоминая определение скоростного коэффициента  $\lambda = u/a^*$  и выражение для критической скорости звука  $a^* = a_0 \sqrt{2/(k+1)}$ , находим

$$u_{\max} = \lambda_{\max} a^* = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \sqrt{kRT_0} \sqrt{\frac{2}{k+1}} = \sqrt{\frac{2k}{k-1}RT_0} = \sqrt{2h_0} , \qquad (3.111)$$

где индексом «0» обозначены параметры адиабатически заторможенного потока. Из (3.111) видно, что максимально достижимая в сопле Лаваля скорость газового потока определяется величиной его заторможенной энтальпии. Например, воздух, имеющий температуру торможения  $T_0 = 300 K$ , невозможно разогнать до скорости более, чем  $\approx 775$  м/с.

Введенные ранее газодинамические функции могут быть выражены и через скоростной коэффициент. Относительная температура  $\tau(\lambda)$  находится по формуле (3.109), а относительная плотность  $\varepsilon(\lambda)$  и давление  $\pi(\lambda)$  находятся из нее при помощи уравнения адиабаты

$$\varepsilon(\lambda) = \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}}, \quad \pi(\lambda) = \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{k}{k-1}}.$$
(3.112)

Приведенная скорость  $\lambda$ , как и число M, считается критерием подобия для газовых течений, характеризующим степень преобразования теплосодержания в кинетическую энергию. Между ними существует однозначная взаимосвязь, которую можно получить путем следующих преобразований

$$M^{2} = \frac{u^{2}}{a^{2}} = \frac{u^{2}}{\left(a^{*}\right)^{2}} \frac{\left(a^{*}\right)^{2}}{a^{2}} \frac{a_{0}^{2}}{a_{0}^{2}} = \lambda^{2} \left(\frac{a^{*}}{a_{0}}\right)^{2} \frac{a_{0}^{2}}{a^{2}} = \lambda^{2} \frac{2}{k+1} \left(\frac{T_{0}}{T}\right)^{2} = \frac{\lambda^{2} \frac{2}{k+1}}{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^{2}}.$$
 (3.113)

Обратное преобразование находится аналогично и выражается зависимостью

<sup>\*</sup> Используется также термин коэффициент скорости.

$$\lambda^{2} = \frac{\frac{k+1}{2}M^{2}}{1 + \frac{k-1}{2}M^{2}}.$$
(3.114)

# 4. ОДНОМЕРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ И ГАЗА

#### 4.1. Одномерная модель реальных потоков

Если все параметры движущегося потока зависят только от одной, в общем случае криволинейной координаты, то такой поток называют *одномерным*. Простейшим примером одномерного потока является течение в элементарной трубке тока, благодаря малой площади поперечного сечения которой скорости течения и другие параметры среды распределены однородно в пределах каждого сечения.

Хотя реальные потоки конченых размеров, строго говоря, не могут считаться одномерными, но некоторые из них могут быть сведены к одномерной модели. Так, например, при течении вязкой жидкости в трубе или в канале между двумя параллельными стенками имеет место неоднородное распределение скорости поперек потока, но эта неоднородность зачастую бывает несущественна с прикладной точки зрения. Во многих технических задачах достаточно знать среднюю по сечению потока скорость *w*, которая определяется как среднерасходная скорость

$$w = \frac{Q}{F} = \frac{1}{F} \int_{F} u \,\mathrm{d}F \,, \tag{4.1}$$

где F – площадь живого сечения потока; Q – объемный расход среды через данное сечение; u – местная скорость движения. Тогда, заменив истинные, неоднородно распределенные по сечению скорости их средним значением w, и приняв давление постоянным по живому сечению, мы приходим к одномерной модели потока.

Если стенки канала, содержащего движущуюся среду, не параллельные, то течение становится трехмерным. Однако, если кривизна линий тока в реализующемся течении мала, а также мал угол, образующийся между соседними линиями тока (рис. 4.1), то такой поток можно приближенно считать одномерным. Потоки, удовлетворяющие этим условиям, называют *плавно изменяющимися*.

Для таких течений с точностью до гидростатической составляющей *рgz* давление можно считать постоянным в пределах живого сечения. Такая точность оказывается достаточной для большинства практических задач динамики жидкости.



Рис. 4.1. Одномерное приближение плавно изменяющегося течения

# 4.2. Уравнение Бернулли для одномерного потока вязкой несжимаемой жидкости

Рассмотрим установившееся движение ограниченного стенками канала плавно изменяющегося потока несжимаемой жидкости. Уравнение Бернулли вдоль каждой линии тока такого течения имеет вид

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} + h_{\mu}, \qquad (4.2)$$

где индексами 1 и 2 отмечены значения параметров среды, относящиеся к сечениям  $F_1$  и  $F_2$ .

Умножим правую и левую часть (4.2) на соответствующую плотность тока  $\rho gu$  и проинтегрируем полученное уравнение по площади живого сечения потока  $F_1$  и  $F_2$ .

$$\int_{F_1} \left( z_1 g + \frac{p_1}{\rho} + \frac{u_1^2}{2} \right) \rho u_1 \, \mathrm{d} F = \int_{F_2} \left( z_2 g + \frac{p_2}{\rho} + \frac{u_2^2}{2} + h_\mu g \right) \rho u_2 \, \mathrm{d} F \,. \tag{4.3}$$

Учитывая, что в пределах живого сечения сумму *zg* + *p*/*р* можно считать практически постоянной, последнее уравнение можем записать в виде

$$z_1 \rho g + p_1 + \frac{1}{2Q} \int_{F_1} \rho u_1^3 dF = z_2 \rho g + p_2 + \frac{1}{2Q} \int_{F_2} \rho u_2^3 dF + \frac{1}{Q} \int_{F_2} h_\mu \rho g u_2 dF, \quad (4.4)$$

где  $Q = \int_{F_1} u_1 dF = \int_{F_2} u_2 dF = wF$  - расход жидкости (*w* – средняя по живому сече-

нию скорость потока).

Введем обозначения

$$\Delta p_{\mu} = \frac{1}{Q} \int_{F} h_{\mu} \rho g u \, \mathrm{d} F, \quad \alpha = \frac{1}{w^{3}} \int_{F} u^{3} \, \mathrm{d} F.$$
(4.5)

Интеграл вида  $\int_{F} \frac{u^2}{2} \rho u \, dF = \frac{\rho}{2} \int_{F} u^3 \, dF$  представляет собой кинетическую энер-

гию потока, переносимую в единицу времени через сечение F потока. Величина  $\frac{w^2}{2}\rho wF$  может быть истолкована, как поток кинетической энергии через то же сечение при постоянной в данном сечении скорости, равной среднерасходной w. Поэтому величина  $\alpha$ , выражаемая вторым равенством (4.5), представляет собой отношение истинного потока кинетической энергии (при неравномерном распределении скорости по сечению) к потоку кинетической энергии, определенному по среднерасходной скорости. Этот параметр называют *коэффициентом Кориолиса*. Величина его всегда больше единицы и зависит то распределения скорости в живом сечении. Например, для развитого ламинарного течения в круглой трубе ко-

вом сечении. Например, для развитого ламинарного течения в круглой трубе коэффициент Кориолиса  $\alpha = 2^*$ , а для турбулентного ~ 1,1. При значительной нерав-

<sup>\*</sup> См. раздел 4.2.

номерности скорости, например в криволинейных каналах, он может достигать больших величин.

С учетом введенных обозначений уравнение Бернулли для плавноизменяющегося потока<sup>\*\*</sup> вязкой несжимаемой жидкости примет вид

$$\rho g z_1 + p_1 + \frac{\alpha_1 \rho w_1^2}{2} = z_2 + p_2 + \frac{\alpha_2 \rho w_2^2}{2} + \Delta p_\mu.$$
(4.6)

Или в дифференциальной форме

$$\rho g \,\mathrm{d}\,z + \mathrm{d}\,p + \rho \,\mathrm{d}\left(\frac{\alpha w^2}{2}\right) = -\mathrm{d}\,p_\mu. \tag{4.7}$$

Каждый из членов уравнения имеет размерность давления и представляет собой тот или иной вид удельной (отнесенный к единице объема) энергии потока:  $\rho gz$  – потенциальной энергии массовых сил (тяжести); p - потенциальной энергии упругого состояния (поверхностных сил давления);  $\alpha \rho w^2/2$  - кинетической энергии;  $\Delta p_{\mu}$  – безвозвратные потери механической энергии на преодоления сил вязкого сопротивления, преобразующиеся в теплоту. В целом уравнение (4.6) описывает закон сохранения механической энергии между сечениями 1 и 2 одномерного плавноизменяющегося потока жидкости.

Давление *р* называется *статическим давлением* потока, которое, будучи выраженным в избыточных единицах, равно *пьезометрическому давлению*, см. раздел 2.4. Сумма  $p + \alpha \rho w^2/2 = p_0$  называется *полным давлением*. Полное давление равно давлению потока, заторможенному в рассматриваемой точке пространства без потерь механической энергии. С учетом введенного понятия полного давления,  $\Delta p$  можно рассматривать, как потери полного давления между рассматриваемыми сечениями потока. Составляющая полного давления, соответствующая кинетической энергии потока, называется *динамическим давлением*  $p_{\pi} = \alpha \rho w^2/2$ .

В технических приложениях широко применяется форма уравнения Бернулли, все члены которого имеют размерность длины. Она получается из (4.6) путем деления правой и левой части на  $\rho g$ :

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 w_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 w_2^2}{2g} + \Delta h_{\mu}.$$
(4.8)

Составляющие данного уравнения Бернулли имеют следующие наименования. Величину  $H_{rg} = z_1 + \frac{p}{\rho g} + \frac{\alpha w^2}{2g}$  называют гидродинамическим напором, величину  $H_{\pi} = \frac{p}{\rho g}$  - пьезометрическим напором,  $H_w = \frac{\alpha w^2}{2g}$  - скоростным напором, а  $\Delta h$  – потерей напора.

потереи нипори.

<sup>&</sup>lt;sup>\*\*</sup> Строго говоря, выполнение условия плавного изменения потока требуется только для окрестности сечений  $F_1$  и  $F_2$ , так как при выводе уравнения (4.6) допущение плавного изменения сделано только для окрестности указанных сечений. Между этими сечениями данное условие может нарушаться.

Как видим все члены уравнения (4.8) имеют размерность длины, которым можно дать следующую геометрическую интерпретацию. Рассмотрим истечение жидкости из резервуара через трубопровод переменного сечения, рис. 4.2.



Рис. 4.2. Геометрическая интерпретация уравнения Бернулли

Выделим в трубопроводе три сечения 1-1, 2-2 и 3-3, в каждом из которых установим трубки Прандтля (для измерения пьезометрического напора) и Пито (для измерения полного напора, то есть суммы пьезометрического и скоростного). Тогда разность показаний трубок Пито и Прандтля есть величина скоростного напора  $\alpha w^2/(2g)$ . Рассмотрим показания трубок в каждом сечении.

Сечение 1-1. Мениск в трубке Пито не достигает уровня воды в резервуаре, так как часть напора  $\Delta h_1$  будет затрачена на преодоление сил сопротивления при входе в трубопровод.

Сечение 2-2. Площадь живого сечения  $F_2$  меньше  $F_1$ , поэтому, в соответствии с уравнением неразрывности,  $w_2 > w_1$ . Разность показаний трубок Пито в первом и во втором сечениях – есть величина потерь напора на преодоление внешних сил сопротивления между этими сечениями  $\Delta h_{1-2} = \Delta h_2 - \Delta h_1$ .

Сечение 3-3. Площадь живого сечения  $F_2$  меньше  $F_3$ , поэтому  $w_2 > w_3$  и  $\frac{\alpha_2 w_2^2}{2\rho g} > \frac{\alpha_3 w_3^2}{2\rho g}$ , то есть скоростной напор  $H_w$  при движении от второго сечения к третьему падает. За счет этого пьезометрический напор  $H_{\rm n}$  возрастает. Полный же напор (показания трубок Пито) падает, так как между сечениями 2-2 и 3-3 имеются потери механической энергии  $\Delta h_{2-3} = \Delta h_3 - \Delta h_2$ .

Геометрическая трактовка уравнения Бернулли заключается в том, что линия полного напора всегда опускается, так как часть механической энергии потока

превращается в тепловую, то есть теряется. При этом сумма всех четырех высот z,  $H_{\Pi}$ ,  $H_w$  и  $\Delta h$  остается постоянной, так как отражает запас полной энергии потока в начальном сечении.

Уравнение Бернулли для нестационарного движения несжимаемой жидкости. Рассмотрим нестационарное движение жидкости, то есть ускоряющийся или замедляющейся поток. В этом случае для разгона жидкости, то есть придания ей ускорения, необходимо затратить некоторую энергию. В случае торможения потока жидкость сама будет совершать работу. Вспоминая, что уравнение Бернулли выражает собой закон сохранения механической энергии, приходим к выводу, что в случае нестационарного движения оно будет содержать дополнительный член  $\Delta p_t$  (или  $\Delta h_t$ ), учитывающий работу внешних сил на разгон жидкости (или работу жидкости по преодолению внешних сил при торможении). Из соображений размерности понятно, что данный член будет пропорционален производной от скорости потока по времени и массе жидкости  $\Delta p_t \sim m d w / dt$ . В гидромеханике показывается, что данный член, например, при течении в круглой трубе длиной *L* имеет вид

$$\Delta p_t = \rho \alpha L \frac{\mathrm{d}\,w}{\mathrm{d}\,t}.\tag{4.9}$$

С учетом этого дополнительного члена уравнение Бернулли для нестационарного одномерного движения несжимаемой жидкости запишется следующим образом

$$\rho g z_1 + p_1 + \frac{\alpha_1 \rho w_1^2}{2} = \rho g z_2 + p_2 + \frac{\alpha_2 \rho w_2^2}{2} + \Delta p_\mu + \Delta p_t.$$
(4.10)

Необходимо еще раз подчеркнуть, что инерционный член может быть, как положительным (при разгоне), так и отрицательным (при торможении).

#### 4.3. Потери давления на гидравлических сопротивлениях

Для решения уравнения Бернулли необходимо уметь определять потери полного давления (напора). Информация о составляющих потерь и методах их расчета приведена в настоящем разделе.

# 4.3.1. Структура общих формул для расчета потерь давления

Потери полного давления при движении вязкой жидкости обусловлены деформациями движущейся среды (вследствие взаимодействия с ограничивающими поток стенками, находящимися в потоке элементами устройств и механизмов), возникновением в результате сдвиговых деформаций касательных вязкостных напряжений. Работа этих напряжении и приводит к диссипации механической энергии.

При рассмотрении потока, ограниченного внешними стенками, все внешние факторы, обуславливающие потери механической энергии движущейся жидкости, называют *гидравлическими сопротивлениями*.

Для того чтобы использовать уравнение Бернулли для решения прикладных задач необходимо предварительно установить зависимости, позволяющие определить величины потерь напора (полного давления), обусловленные гидравлическими сопротивлениями. Гидравлические потери по физической природе их проявления подразделяются на два типа:

1. Местные потери (потери на местных сопротивлениях), обусловленные изменением по величине и направлению скорости движения жидкости, которое сопровождаются образованием вихревых зон. Местные потери локализованы на участке канала потока небольшой протяженности, причиной их возникновения является наличие уступов, резких изгибов стенок канала, слияние нескольких потоков или разветвление потока на несколько каналов, наличие регулирующих или запорных элементов (гидравлической арматуры) в рассматриваемом участке канала и т. п.

2. Потери на трение – распределенные по длине канала потери, возникающие как следствие затрат энергии на преодоление сил трения жидкости о стенки. Под этими потерями понимают потери, возникающие в протяженных каналах с приблизительно постоянной площадью живого сечения и установившимся профилем скорости в нем, то есть при равномерном движении жидкости.

В реальных потоках участки равномерного движения жидкости могут чередоваться с местными сопротивлениями, число частных видов которых чрезвычайно велико. При подсчете полных потерь применяется принцип сложения, согласно которому полные потери давления равны сумме потерь на отдельных участках равномерного движения и потерь на всех местных сопротивлениях

$$\Delta p_{\mu} = \sum_{i=1}^{n} \Delta p_{\mathrm{Tp}i} + \sum_{j=1}^{m} \Delta p_{\mathrm{M}j}, \qquad (4.11)$$

где  $\Delta p_{Mi}$  - потери полного давления на трение на *i*-ом участке равномерного движения;  $\Delta p_{Mj}$  - потери полного давления на *j*-ом местном сопротивлении. В терминах напора выражение (4.11) примет вид

$$\Delta h_{\mu} = \sum_{i=1}^{n} \Delta h_{\text{rp}i} + \sum_{j=1}^{m} \Delta h_{\text{M}j} \,. \tag{4.12}$$

Несмотря на то, что структура потока и механизм потерь в местных сопротивлениях и на участке равномерного движения существенно различны, исходя из общих законов гидродинамики можно установить структуру общих формул, выражающих потери в любом сопротивлении. Из этих общих формул в некоторых случаях удается получить теоретические формулы для конкретных видов сопротивлений, а в других – приходится дополнительно использовать эмпирические данные.

Формула расчета потерь на трение. Рассмотрим равномерный поток жидкости в цилиндрической трубе, в которой отсутствуют местные сопротивления. В установившемся потоке движущая сила – сила перепада давления уравновешивается силой сопротивления за счет трения:

$$\left(p_1 - p_2\right)F = \tau F_6,\tag{4.13}$$

где  $\tau$  - напряжение трения;  $F_6$  – площадь боковой поверхности трубы. Для круглой трубы  $F = \pi d^2/4$ ,  $F_6 = \pi dL$  и (4.13) принимает вид

$$p_1 - p_2 = \Delta p_{\rm TP} = 4\tau \frac{L}{d}.$$
 (4.14)

Разделив и умножив правую часть на динамическое давление  $\rho w^2/2$ , получим

$$\Delta p_{\rm rp} = \rho \frac{w^2}{2} \lambda \frac{L}{d} \tag{4.15}$$

ИЛИ

$$\Delta h_{\rm rp} = \frac{w^2}{2g} \lambda \frac{L}{d}, \qquad (4.16)$$

где  $\lambda = 8 \frac{\tau}{\rho w^2}$  - коэффициент гидравлического трения.

Впервые формула (4.15) была получена экспериментально в XIX веке и названа формулой Дарси-Вейсбаха.

**Формула расчета потерь на местных сопротивлениях.** При наличии местного сопротивления на рассматриваемом участке потока также возникает перепад давления  $\Delta p_{\rm M} = p_1 - p_2$ . Относительная величина этого перепада

$$\xi_{\rm M} = \frac{\Delta p_{\rm M}}{\rho w^2 / 2} \tag{4.17}$$

называется коэффициентом местного сопротивления. В общем случае коэффициент  $\xi_{M}$  зависит от геометрии потока (то есть типа местного сопротивления и его размеров) и числа Рейнольдса и определяется с использованием экспериментальных данных. С учетом введенного коэффициента местного сопротивления, получим

$$\Delta p_{\rm M} = \xi_{\rm M} \rho \frac{w^2}{2}, \quad \Delta h_{\rm M} = \xi_{\rm M} \frac{w^2}{2g}. \tag{4.18}$$

Таким, образом, для учета потерь полного давления необходимо уметь определять коэффициенты  $\lambda$  и  $\xi_{M}$ , которые в общем случае зависят от конфигурации потока и режима течения (числа Рейнольдса).

# 4.1. Основы теории подобия и анализа размерностей и их применение для определения сопротивления гидравлического трения

В технических приложениях зачастую приходится сталкиваться с ситуацией, когда исследование рабочих процессов на натурном объекте оказывается практически невозможным из-за больших материальных затрат или времени, потребного для выполнения испытаний. В этом случае испытания на натурном объекте заменяют исследованиями на моделях. Аналогичная ситуация необходимости выполнения модельных испытаний возникает и в исследовательских работах, когда требуемый результат не может быть получен расчетным путем.

Главной целью моделирования является выдача необходимых практических рекомендаций по результатам опытов на моделях. Для этого необходимо, вопервых, правильно смоделировать процесс и, во-вторых, представить полученные результаты таким образом, чтобы они обладали общностью, а не только отображали результаты испытаний конкретной модели. Этой цели и служит теория подобия и анализа размерностей.

### 4.1.1. Основные положения теории подобия

Термин подобие заимствован из геометрии. Как известно, геометрически подобные фигуры, например треугольники, обладают тем свойством, что их соответственные углы равны, а сходственные стороны пропорциональны. Пусть длины сторон первого треугольника равны  $l_1^{(1)}, l_2^{(1)}, l_3^{(1)}$ , а второго –  $l_1^{(2)}, l_2^{(2)}, l_3^{(2)}$ . Тогда для подобных треугольников справедливы соотношения

$$l_1^{(1)} = c_l l_1^{(2)}, \, l_2^{(1)} = c_l l_2^{(2)}, \, l_3^{(1)} = c_l l_3^{(2)}.$$
(4.19)

Коэффициент пропорциональности  $c_l$  в данном примере представляет собой константу подобия и данная константа одинакова для всех трех сторон треугольника. Представим теперь длины сторон в относительном, то есть безразмерном виде. Для этого выберем в качестве масштаба длин <u>M</u><sub>l</sub>, например, длину первой стороны. То есть для первого треугольника  $M_l^{(1)} = l_1^{(1)}$ , для второго  $-M_l^{(2)} = l_1^{(2)}$ . Тогда в относительных переменных длины сторон будут равны

$$\tilde{l}_{1}^{(1)} = 1, \, \tilde{l}_{2}^{(1)} = \frac{l_{2}^{(1)}}{l_{1}^{(1)}}, \, \tilde{l}_{3}^{(1)} = \frac{l_{3}^{(1)}}{l_{1}^{(1)}} \, \bowtie \, \tilde{l}_{1}^{(2)} = 1, \, \tilde{l}_{2}^{(2)} = \frac{l_{2}^{(2)}}{l_{1}^{(2)}}, \, \tilde{l}_{3}^{(2)} = \frac{l_{3}^{(2)}}{l_{1}^{(2)}}. \tag{4.20}$$

Преобразуем следующим образом выражение для  $\tilde{l}_2^{(1)}$  с использованием соотношений (4.19)

$$\tilde{l}_{2}^{(1)} = \frac{l_{2}^{(1)}}{l_{1}^{(1)}} = \frac{c_{l}l_{2}^{(2)}}{c_{l}l_{1}^{(2)}} = \frac{l_{2}^{(2)}}{l_{1}^{(2)}} = \tilde{l}_{2}^{(2)}.$$
(4.21)

Аналогично можно показать, что  $\tilde{l}_{3}^{(1)} = \tilde{l}_{3}^{(2)}$ . Таким образом у подобных треугольников равны сходственные углы и длины сторон, представленные в относительном (безразмерном) виде.

Условия подобия могут быть распространены и на любые физические явления, например, на поле скоростей при движении двух потоков жидкости - *кинематическое подобие*, на поле сил, вызывающих это движение – *динамическое подобие*, на поле температур и тепловых потоков – *тепловое подобие* и т. д.

В общем случае понятие подобия физических явлений сводится к следующим положениям:

1. Подобными могут быть физические явления только качественно одинаковые, то есть такие, которые аналитически описываются уравнениями, одинаковыми как по форме, так и по содержанию.

2. Обязательным условием подобия физических процессов является геометрическое подобие.

3. При анализе подобных явлений сопоставлять между собой можно только однородные величины и лишь в сходственных точках пространства и в сходственные моменты времени.

Однородными называются такие величины, которые имеют один и тот же физический смысл и одинаковую размерность. Координаты *сходственных точек*, представленные в относительном виде (то есть поделенные на соответствующие масштабы), одинаковы.

4. Наконец, подобие двух физических явлений означает подобие всех величин, характеризующих рассматриваемые явления. Это значит, что в сходственных точках пространства и в сходственные моменты времени любая величина  $\phi^{(1)}$  первого явления пропорциональна однородной с ней величине  $\phi^{(2)}$  второго явления, то есть

$$\varphi^{(2)} = c_0 \varphi^{(1)}$$
 или  $\tilde{\varphi}^{(2)} = \tilde{\varphi}^{(1)}$ . (4.22)

Коэффициент пропорциональности  $c_{\phi}$  называется константой (постоянной) подобия. При этом каждая физическая величина  $\phi$  имеет свою постоянную подобия  $c_{\phi}$ , численно отличную от других. Ни от координат, ни от времени  $c_{\phi}$  не зависит.

Таким образом, подобие двух явлений означает подобие полей одноименных физических величин<sup>\*</sup>, определяющих эти явления.

Совокупность параметров, определяющих какой-либо физический процесс, можно рассматривать, как решение соответствующих уравнений, описывающих его. Но если в подобных процессах безразмерные значения однородных параметров в сходственных точках одинаковы, то и сами уравнения, будучи представленными в относительном виде, должны быть одинаковы.

**Гидродинамическое подобие.** Рассмотрим подобие гидродинамических процессов на примере стационарного движения идеальной несжимаемой жидкости. Как известно, такое движение описывается уравнением Бернулли, связывающим параметры жидкости в двух точках области течения 1 и 2:

$$\rho g z_1 + p_1 + \rho \frac{u_1^2}{2} = \rho g z_2 + p_2 + \rho \frac{u_2^2}{2}.$$
(4.23)

Введем масштабы физических параметров процесса  $p^0, u^0$  и геометрический масштаб  $z^0$ . Тогда размерные величины рассматриваемого процесса могут быть представлены следующим образом

$$p = p^{0}\tilde{p}, u = u^{0}\tilde{u}, z = z^{0}\tilde{z}, \qquad (4.24)$$

где волной обозначены относительные переменные, то есть  $\tilde{p} = p/p^0$  и т. д. Подставив (4.24) в (4.23), получим

$$\rho z^{0} g \tilde{z}_{1} + p^{0} \tilde{p}_{1} + \rho \frac{\left(u^{0}\right)^{2} \tilde{u}_{1}^{2}}{2} = \rho z^{0} g \tilde{z}_{2} + p^{0} \overline{p}_{2} + \rho \frac{\left(u^{0}\right)^{2} \tilde{u}_{2}^{2}}{2}.$$
(4.25)

<sup>&</sup>lt;sup>\*</sup> То есть пропорциональность однородных физических величин в сравниваемых процессах или, что то же самое, равенство однородных физических величин, выраженных в относительном (безразмерном) виде.

Разделив обе части этого уравнения на  $\rho(u^0)^2$ , получим

$$\frac{z^{0}g}{\left(u^{0}\right)^{2}}\tilde{z}_{1} + \frac{p^{0}}{\rho\left(u^{0}\right)^{2}}\tilde{p}_{1} + \frac{\tilde{u}_{1}^{2}}{2} = \frac{z^{0}g}{\left(u^{0}\right)^{2}}\tilde{z}_{2} + \frac{p^{0}}{\rho\left(u^{0}\right)^{2}}\overline{p}_{2} + \frac{\tilde{u}_{2}^{2}}{2}.$$
(4.26)

Введем обозначения

$$\operatorname{Fr} = \frac{\left(u^{0}\right)^{2}}{z^{0}g},\tag{4.27}$$

$$\operatorname{Eu} = \frac{p^{0}}{\rho(u^{0})^{2}},\tag{4.28}$$

называемые в теории гидродинамического подобия числами Фруда и Эйлера.

С учетом введенных обозначений уравнение (4.26) примет вид

$$\frac{1}{\mathrm{Fr}}\tilde{z}_{1} + \mathrm{Eu}\,\tilde{p}_{1} + \frac{\tilde{u}_{1}^{2}}{2} = \frac{1}{\mathrm{Fr}}\tilde{z}_{2} + \mathrm{Eu}\,\overline{p}_{2} + \frac{\tilde{u}_{2}^{2}}{2}.$$
(4.29)

Из (4.29) видно, что два гидродинамических процесса в несжимаемой жидкости, протекающих при различных условиях (например, при различном уровне давления, жидкость в этих процессах может иметь различную плотность и т. д.), будут подобными, если в этих процессах будут одинаковыми числа Эйлера и Фруда<sup>\*</sup>.

В общем случае, более сложном, чем рассмотренный, физический процесс описывается системой дифференциальных уравнений, для однозначного решения которых задаются граничные и начальные условия, называемые условиями однозначности. Поэтому в подобных процессах должны быть одинаковыми не только обезразмеренные системы уравнений, но и представленные в относительном виде условия однозначности. При приведении к безразмерному виду числа подобия будут входить не только в сами уравнения, но и в условия однозначности. При этом нетрудно понять, что равенство в двух процессах чисел подобия, входящих именно в условия однозначности, гарантируют равенство решений обезразмеренных уравнений для этих двух процессов.

Таким образом, особо выделяются числа подобия, составленные только из величин, входящих в условия однозначности. Они называются *определяющими или критериями подобия*. Инвариантность (одинаковость) определяющих чисел подобия является условием, которое должно быть выполнено для достижения подобия.

Итак, основные положения теории подобия можно сформулировать в виде трех теорем.

Первая теорема подобия формулируется так: подобные между собой процессы имеют одинаковые числа подобия.

<sup>&</sup>lt;sup>\*</sup> Напоминаем, что подобные процессы описываются одинаковыми уравнениями, представленными в относительных переменных.

Вторая теорема подобия гласит: зависимость между переменными, характеризующими какой-либо процесс, может быть представлена в виде зависимости между числами подобия  $K_1, K_2, ..., K_n$ :

$$f(K_1, K_2, ..., K_n) = 0.$$
 (4.30)

Зависимость вида (4.30) называется уравнением подобия.

**Третья теорема подобия** формулируется так: подобны те процессы, условия однозначности которых подобны, а числа подобия, составленные из величин, входящих в условия однозначности, имеют одинаковое численное значение.

Теория подобия позволяет, не интегрируя дифференциальных уравнений, получить из них числа подобия и, используя опытные данные, сформировать уравнения подобия<sup>\*</sup>, которые будут справедливы, для всех подобных между собой процессов.

Такие обобщенные зависимости, однако, ограничены условиями подобия, и из них нельзя делать заключения, выходящие за пределы этих ограничений. Всегда нужно помнить, что общего решения теория подобия не дает, она позволяет лишь обобщить опытные данные.

#### 4.1.2. Основные положения теории анализа размерностей

Иногда изучаемое явление настолько сложно, что для него невозможно составить полную систему уравнений. В этом случае общий вид условий подобия может быть найден при помощи метода анализа размерностей. Рассмотрим основные понятия данной теории.

*Размерными* называются величины, численные значения которых зависят от системы единиц измерения. Примеры размерных величин: длина, время, энергия, момент силы и т. д.

*Безразмерными* называются величины, численные значения которых не зависят от системы единиц измерения. Примеры безразмерных величин: отношение двух длин, геометрические углы<sup>\*</sup>, отношение квадрата длины к площади, отношение энергии к моменту силы и т. д.

Единицы измерения бывают *основными* и *производными*. Производные единицы выражаются определенным образом через основные. Именно наличие производных единиц позволяет компоновать безразмерные комплексы - числа подобия. Количество и вид основных единиц зависит от системы единиц измерения. В системе СИ за основные единицы измерения приняты: *l* - метр, *t* – секунда, *m* - килограмм-массы, К – градус Кельвина и т. д.

*Размерностью* называется выражение производной единицы измерения через основные. Размерность будем записывать символически в виде формулы, в которой символ единицы массы обозначается *M*, символ единицы длины – *L*, символ

<sup>&</sup>lt;sup>\*</sup> Конкретный вид уравнений подобия может быть получен, например, путем аппроксимации экспериментальных данных, представленных в относительном виде, различными зависимостями.

<sup>&</sup>lt;sup>\*</sup> Фактически углы имеют размерность – рад, градус. Однако в научных и технических исследованиях принято измерять углы в рад, поэтому можно считать угол безразмерной величиной.

единицы времени – *T*, символ единицы температуры – *K*. Размерность физической величины обозначается символом этой величины, заключенным в квадратные скобки. Например, для размерности силы *F* будем иметь

$$[F] = MLT^{-2}. \tag{4.31}$$

Теория размерностей основывается на следующих положениях.

1. Любое математическое уравнение, описывающее изучаемый процесс, должно быть однородным по размерностям, то есть физические величины должны входить в это уравнение таким образом, чтобы все члены уравнения имели одинаковую размерность.

2. Производные единицы измерения выражаются через основные в виде их произведения в соответствующих степенях, то есть в виде зависимости типа (4.31).

В теории размерностей доказывается следующая основная теорема, которая называется *темеоремой*.

Выражающая некоторый физический закон функциональная связь между п размерными величинами  $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ , из которых k величин имеют независимые размерности, может быть представлена в виде связи между s = n - k безразмерными комплексами  $\pi_a, \pi_v, ..., \pi_w$ .

Применим эту теорему к задаче определения потерь давления на трение при течении жидкости по трубопроводу.

Из общих физических представлений можно предположить, что величина потерь давления на трение  $\Delta p$  является функцией скорости течения *w*, плотности  $\rho$ , коэффициента динамической вязкости  $\mu$  жидкости, диаметра *d*, длины *L* трубопровода и средней высоты бугорков шероховатости его стенок  $k^{**}$ . То есть имеем следующую функциональную зависимость

$$f(\Delta p, \rho, w, \mu, d, L, k) = 0, \qquad (4.32)$$

связывающую между собой 7 размерных величин. Величин, имеющих независимые размерности в данной задаче 3, так как за основные размерности в механике приняты: метр, секунда, килограмм массы. Следовательно, в соответствии с  $\pi$ -теоремой зависимость (4.32) может быть преобразована к зависимости между четырьмя безразмерными комплексами – числами подобия. В качестве величин с независимыми размерностями примем плотность, скорость и диаметр. Оставшиеся четыре величины  $\Delta p$ , l, k,  $\mu$  служат «основой» для формирования четырех безразмерных комплексов. Два комплекса следуют из полученной ранее формулы (4.15). Первый из них построен на основе величины  $\Delta p$  и это число Эйлера  $\pi_1 = \text{Eu} = \Delta p / (\rho w^2)$ . Второй, сформированный на основе величины L, представляет собой относительную длину трубопровода  $\pi_2 = L/d$ . Третий комплекс, в котором «задействована» величина  $\kappa_2$ . То есть это относительная высота бугорков

<sup>\*\*</sup> Эти предположения подтверждаются опытными данными и результатами теоретических исследований.

шероховатости  $\pi_3 = k/d$ . Четвертый комплекс, который формируется на основе величины µ, представляется в виде следующей комбинации

$$\pi_4 = \operatorname{Re} = \frac{\rho w d}{\mu} \,. \tag{4.33}$$

Этот комплекс имеет фундаментальное значение в механике жидкости и газа, называется числом Рейнольдса и обозначается как Re.

Таким образом, зависимость (4.32) может быть представлена в виде

$$f\left(\operatorname{Eu},\frac{L}{d},\frac{k}{d},\operatorname{Re}\right) = 0.$$
 (4.34)

Придадим ей более ясный вид, для чего вновь обратимся к формуле (4.15), которую запишем следующим образом

$$\operatorname{Eu} = \frac{\lambda}{2} \frac{L}{d}.$$
(4.35)

Сравнивая (4.34) и (4.35), можем сделать вывод, что коэффициент гидравлического трения λ в общем случае должен быть функцией двух параметров

$$\lambda = \lambda \left( \operatorname{Re}, \frac{k}{d} \right). \tag{4.36}$$

Таким образом, используя положения теории подобия и анализа размерностей, мы смогли сформировать обобщенный вид зависимости потерь давления на трение от определяющих параметров.

При исследовании подобия нестационарных гидромеханических процессов в дополнение к полученным выше числам Eu, Fr, Re используется еще один безразмерный комплекс, называемый числом Струхаля

$$Sh = \frac{l^0}{u^0 t^0}.$$
 (4.37)

Он может быть получен при обезразмеривании нестационарного уравнения движения жидкости.

Введенным выше при анализе гидродинамических процессов безразмерным комплексам (числам подобия) можно дать следующее физическое истолкование. Число Фруда  $Fr = (u^0)^2 / (gz^0)$  характеризует отношение силы инерции к силе тяжести; число  $Eu = p^0 / (\rho(u^0)^2)$  - отношение силы давления к силе инерции; число  $Re = \rho u^0 l^0 / \mu$  - отношение сил инерции к силе вязкости; число  $Sh = l^0 / (u^0 t^0)$  - отношение локальной силы инерции к конвективной. Это еще раз подтверждает то, что рассмотренные числа подобия являются числами динамического подобия, так как все они представляют собой отношение различных сил.

В завершении анализа вида зависимости потерь давления не трение от определяющих параметров заметим, что конкретный вид уравнения (4.36) устанавливается на основании экспериментальных исследований. В некоторый частных случаях этот вид может быть получен путем теоретического анализа. Материалы, посвященные данному вопросу, приведены в двух следующих разделах.

### 4.2. Потери на трение при ламинарном течении

При ламинарном режиме течения жидкости в трубе характеристики сопротивления трения могут быть определены теоретическим путем. Рассмотрим установившееся течение несжимаемой жидкости по участку трубопровода длиной l и диаметром d, рис. 4.3.



Рис. 4.3. К определению характеристик сопротивления трения в ламинарном потоке

В условиях установившегося течения разность давлений  $\Delta p = (p_1 - p_2)$  затрачивается на преодоления сил сопротивления. Заметим, что при течении по трубопроводу давление в любом из поперечных сечений может считаться постоянным. То есть в каждой точке сечения 1 давление равно  $p_1$ , а в каждой точке сечения 2 –  $p_2$ . Тогда, так как при ламинарном течении жидкость движется параллельными слоями, то для любого значения поперечной координаты *у* можем записать выражение

$$\pi \left(\frac{d}{2} - y\right)^2 \Delta p = 2\tau \pi \left(\frac{d}{2} - y\right)l, \qquad (4.38)$$

откуда находим напряжение трения т

$$\tau = \frac{\Delta p}{4l} (d - 2y). \tag{4.39}$$

С другой стороны, в соответствии с законом трения Ньютона, при ламинарном режиме течения напряжение трения выражается формулой

$$\tau = \mu \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} \tag{4.40}$$

Приравнивая правые части (4.39) и (4.40), получим уравнение для определения профиля скорости поперек потока

$$du = \frac{\Delta p}{4l\mu} (d - 2y) dy.$$
(4.41)

Интегрируя, получаем

$$u = \frac{\Delta p d^2}{4l\mu} \left(\frac{y}{d} - \frac{y^2}{d^2}\right) + C.$$
(4.42)

Так как на стенке канала (при y = 0) скорость рана нулю, то константа интегрирования также рана нулю C = 0. Следовательно,
$$u = \frac{\Delta p d^2}{4l\mu} \left( \frac{y}{d} - \frac{y^2}{d^2} \right). \tag{4.43}$$

При y = d/2 скорость достигает максимума

$$u_{\max} = \frac{\Delta p d^2}{4 l \mu} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\Delta p d^2}{16 l \mu}.$$
 (4.44)

Найдем расход Q и среднерасходную скорость w жидкости в канале.

$$Q = 2\pi \int_{0}^{d/2} \left(\frac{d}{2} - y\right) u \, \mathrm{d} \, y = \frac{\Delta p d^{4} \pi}{2l \mu} \int_{0}^{d/2} \left(\frac{1}{2} - \frac{y}{d}\right) \left[\frac{y}{d} - \left(\frac{y}{d}\right)^{2}\right] \, \mathrm{d}\left(\frac{y}{d}\right) =$$

$$= \frac{\Delta p d^{4} \pi}{2l \mu} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{y}{d}\right)^{2} - \frac{3}{6} \left(\frac{y}{d}\right)^{3} + \frac{1}{4} \left(\frac{y}{d}\right)^{4}\right]_{0}^{d/2} = \frac{\Delta p d^{4} \pi}{128l \mu}$$

$$w = \frac{4Q}{\pi d^{2}} = \frac{\Delta p d^{2}}{32l \mu}.$$
(4.46)

Как видно из (4.44) и (4.46), при ламинарном течении в круглой трубе максимальная скорость жидкости в два раза больше среднерасходной скорости, то есть коэффициент Кориолиса α<sub>л</sub> при данных условиях

$$\alpha_{\pi} = 2$$
.

Определим напряжение трения при ламинарном течении. Для этого подставим (4.43) в (4.40):

$$\tau = \mu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} y} \left[ \frac{\Delta p d^2}{4l\mu} \left( \frac{y}{d} - \frac{y^2}{d^2} \right) \right]_{y=0} = \frac{\Delta p d}{4l}.$$
(4.47)

Тогда коэффициент трения λ для случая ламинарного течения жидкости в круглой трубе будет равен

$$\lambda = \frac{8\tau}{\rho w^2} = \frac{8\Delta p d}{4l\mu} \frac{1}{\rho w^2} = \frac{\Delta p d^2}{32l\mu} \frac{8 \cdot 8\mu}{d} \frac{1}{\rho w^2} = \frac{64\mu}{\rho w d} = \frac{64}{\text{Re}}.$$
 (4.48)

Зависимость (4.48) называется формулой Пуазейля.

#### 4.3. Опытные данные о коэффициенте гидравлического трения

Если при эксперименте измерить перепад давления и среднюю скорость в трубопроводе, то коэффициент гидравлического трения λ может быть найден по формуле Дарси-Вейсбаха. Впервые такие опыты выполнил и обобщил для гидравлически гладких и шероховатых труб Иван Ильич Никурадзе в Гетингенском университете 1933 г. под руководством Л. Прандтля. Опыты проводились для труб с искусственно созданной равномерно-зернистой шероховатостью, то есть бугорки шероховатости имели приблизительно одинаковые размеры и форму<sup>\*</sup>. Результаты опытов И. Никурадзе представлены на диаграмме, рис. 4.4. В качестве

<sup>\*</sup> Естественная шероховатость, образующаяся в трубах в результате коррозии, отложений и эрозии существенно неоднородна.

геометрического параметра подобия при обработке результатов экспериментов принято отношение  $k_s/d$ , где индексом «*s*» отмечена равномерно-зернистая шероховатость. На диаграмме имеется пять зон.



Рис. 4.4. Диаграмма И. Никурадзе зависимости коэффициента трения для труб с равномерно-зернистой шероховатостью

1 – зона ламинарного режима ( $\text{Re}_d < 2300$ ). В пределах этой зоны  $\lambda$  не зависит от шероховатости (кривая 1) и подчиняется формуле Пуазейля

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}_d}.$$
(4.49)

Здесь и далее  $\text{Re}_d$  – число Рейнольдса, определенное по диаметру трубопровода, то есть  $\text{Re}_d = \rho w d / \mu$ .

2 – переходная зона от ламинарного к турбулентному режиму течения соответствует числам Рейнольдса  $2300 < \text{Re}_d < 4000$  (кривая 2). В потоке наблюдается исчезающие очаги турбулентности. Коэффициент трения определяется по формуле Френкеля

$$\lambda = \frac{2,7}{\text{Re}_d^{0.53}}.$$
(4.50)

3 – зона турбулентного движения в гидравлически гладких трубах (кривая 3 на рис. 4.4) соответствует числам Рейнольдса  $4000 < \text{Re}_d < 20 \frac{d}{k_s}$  и высоте бугорков шероховатости  $\delta_n = 68, 4r_0 \text{Re}_d^{0.875} > k_s$ . Коэффициент трения может быть определен по формуле Блазиуса

$$\lambda = \frac{0.316}{\text{Re}_d^{0.25}}.$$
(4.51)

4 – доквадратичная зона сопротивления ограничивается кривой 3 и пунктирной линией *К-К* (режим частично шероховатых труб) соответствует числам Рейнольдса  $20d/k_s < \text{Re}_d < 500d/k_s$ . Коэффициент трения может быть определен по формуле Альтшуля

$$\lambda = 0.11 \left( \frac{k_s}{d} + \frac{68}{\text{Re}_d} \right)^{0.25}$$
(4.52)

5 – зона квадратичного сопротивления образована горизонтальными участками кривых<sup>\*</sup> (режим развитой шероховатости) соответствует числам Рейнольдса  $\operatorname{Re}_d > 500d/k_s$ . Здесь работает формула Никурадзе

$$\lambda = 1,74 + \lg\left(\frac{d}{k_s}\right) \tag{4.53}$$

или формула Шифрисона

$$\lambda = 0.11 \left(\frac{k}{d_s}\right)^{0.25}.$$
 (4.54)

При данном режиме течения толщина вязкого подслоя<sup>\*\*</sup> мала и турбулентный поток непосредственно взаимодействует с выступами шероховатости. Эта зона называется автомодельной зоной, так как λ не зависит от Re<sub>d</sub>.

Заметим, что формула Альтшуля является универсальной, так как при  $k_s = 0$  она переходит в формулу Блазиуса, а при  $\text{Re}_d \rightarrow \infty$  – в формулу Шифрисона.

Для труб с естественной шероховатостью существуют аналогичные данные по коэффициенту  $\lambda$ , выполненные рядом исследователей позже работ Никурадзе, рис. 4.5.

<sup>\*</sup> Зона называется «квадратичной», так как  $\lambda$  не зависит от Re и потери давления пропорциональны квадрату скорости.

<sup>\*\*</sup> Понятие вязкого подслоя поясняется в следующем разделе.



Рис. 4.5 Диаграмма для определения коэффициента трения λ для труб с естественной шероховатостью

Из рис. 4.5 видно, что в переходной области поведение коэффициента шероховатости отличается от зависимостей, полученных Никурадзе. Для труб с естественной шероховатостью  $\lambda$  в этой зоне всегда выше чем в квадратичной и непрерывно убывает при увеличении Re<sub>d</sub>. Это объясняется неравномерностью шероховатости. В результате на сопротивление влияет не только средняя высота выступов шероховатости, но и их форма, а также расположение на стенке. Поэтому в практике пользуются эквивалентной шероховатостью  $k_{3кB}$ , под которой понимают такую высоту выступов однородной (песочной) шероховатости, которая создает сопротивление, равное сопротивлению реальных труб. Значения  $k_{3кB}$  определяются экспериментально и приводятся в специальных справочниках в зависимости от типа, материала и размера труб. Отношение  $k/k_{3кB}$  колеблется в широких пределах от 1,5 до 10.

### 4.4. Начальный участок течения жидкости в трубах

Приведенные выше соотношения для расчета коэффициента гидравлического трения, строго говоря, справедливы для так называемого развитого течения, то есть для такого участка потока, где профиль скорости в поперечном сечении полностью сформировался и не изменяет своей формы. Например, при ламинарном течении – это параболическое распределение скорости (4.43). Рассмотрим подробнее начальный участок течения, то есть участок, на котором происходит формирование установившегося профиля скорости.

Ламинарное течение. При ламинарном течении профиль скорости (4.43) существует только на участке стабилизированного течения, где форма профиля не зависит от продольной координаты. Если же на вход трубы поступает однородный по скорости поток, то возникает начальный участок течения, протяженностью  $l_{\text{нач}}$ , на котором исходный однородный профиль скорости, вследствие действия вязких сил, преобразуется в параболический, рис. 4.6.



Рис. 4.6. Схема начального участка ламинарного течения в трубе

Так как на стенках трубы скорость жидкости равна нулю, а расход в любом сечении остается постоянным, то замедление движения у пристенных слоев компенсируется соответствующим увеличением скорости слоев, расположенных ближе к центру трубы.

Таким образом, на начальном участке поток имеет ядро, где сохраняется равномерное распределение скоростей, и пристенный пограничный слой, в котором скорость распределяется неравномерно. В конце участка пограничные слои смыкаются на оси трубы, и ниже по течению устанавливается параболическое распределение скоростей.

Длина начального участка 
$$l_{\text{нач}}$$
 может быть оценена по формуле С.М. Тарга  $l_{\text{нач}} = 0,04d \operatorname{Re}_d.$  (4.55)

На начальном участке формула (4.49) несправедлива, поэтому для определения гидравлического сопротивления начального участка трубы должны применяться специальные экспериментальные данные или решение уравнений гидродинамики<sup>\*</sup>, включающих связь напряжений вязкого сопротивления с полем скорости, при соответствующих начальных и граничных условиях.

**Турбулентное течение.** При расчете турбулентных течений в настоящее время используют экспериментальные данные, так как уравнения, описывающие турбулентные течения незамкнуты и, следовательно, не могут быть решены без использования дополнительной информации. Рассмотрим турбулентный поток жидкости в круглой трубе, рис. 4.7.

В турбулентном потоке полное напряжение трения т слагается из вязкостного  $\tau_{\mu}$  (обусловленного действием молекулярной вязкости жидкости) и турбулентного  $\tau_{\tau}$ . Вследствие действия молекулярной вязкости жидкость прилипает к стенкам канала, поэтому в потоке существует пристенный *вязкий подслой* толщиной  $\delta_{n}$ , где течение ламинарное. В пределах вязкого подслоя  $\tau_{\mu} >> \tau_{\tau}$ , поэтому здесь можно принять  $\tau = \tau_{\mu}$ . В центральной части потока (в *турбулентном ядре*)  $\tau_{\tau} >> \tau_{\mu}$ , следовательно здесь  $\tau = \tau_{\tau}$ . Таким образом весь поток можно разбить на

<sup>\*</sup> Так называемых уравнений Навье-Стокса.

область турбулентного течения и вязкий подслой. В действительности резкой границы между вязким подслоем и турбулентным ядром не существует, переход осуществляется через буферную область конечной толщины. Двухслойная модель используется как приближенное описание реальной структуры потока.



Рис. 4.7. Схема структуры турбулентного потока в трубе: 1 – профиль скорости при турбулентном потоке; 2 – при ламинарном потоке

В вязком подслое течение ламинарное, следовательно, справедлив закон Ньютона

$$\tau = \mu \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}.\tag{4.56}$$

Так как толщина  $\delta_{\pi}$  мала, то примем, что по всему подслою касательные напряжения постоянны и равны напряжениям на стенке  $\tau_w$ . Интегрируя (4.56) с учетом этого допущения в пределах от y = 0 до текущего значения y, получаем линейный закон распределения скорости в вязком подслое

$$u = \frac{\tau_w}{\mu} y. \tag{4.57}$$

Рассмотрим турбулентное ядро потока  $\delta_n < y < r_0$ . Для определения турбулентных напряжений трения используется понятие турбулентной вязкости. В отличие от молекулярной вязкости µ турбулентная вязкость µ<sub>т</sub> зависит не только от физических свойств жидкости, но и от параметров течения жидкости. Для определения µ<sub>т</sub> имеется большое число полуэмпирических теорий, отличающихся сложностью постановки и областью применимости. Однако до настоящего времени не удалось создать универсальную модель<sup>\*</sup> достоверно описывающую природу турбулентности.

В нашем случае течения в трубе для определения турбулентных напряжений трения можно использовать гипотезу Л. Прандтля, согласно которой

$$\tau = \rho l^2 \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right)^2,\tag{4.58}$$

где *l* – длина пути смешения (масштаб турбулентности), для определения которой А.А. Саткевичем предложена формула

<sup>\*</sup> Подобную модели Ньютона (4.56) для ламинарного течения.

$$l = \chi y \sqrt{1 - \frac{y}{r_0}} \,. \tag{4.59}$$

Подставив (4.59) в (4.58) и интегрируя полученное выражение, приходим к логарифмическому распределению скорости в турбулентном ядре

$$u = \frac{u_*}{\chi} \ln y + C, \qquad (4.60)$$

где  $u_* = \sqrt{\tau_w / \rho}$  - «динамическая» скорость,  $\chi$  и *C* – экспериментальные константы.

Толщина вязкого подслоя δ<sub>л</sub> может быть определена по формулам

$$\delta_{\pi} = 11.6 \frac{v}{u_*}, \quad \delta_{\pi} = 68.4d \operatorname{Re}_d^{-0.875}.$$
 (4.61)

Опытные данные показали, что вблизи оси трубы распределение скоростей несколько отличается от логарифмического, но это отличие несущественно. Логарифмический профиль скорости является универсальным, пригодным для диапазона чисел Рейнольдса Re<sub>d</sub> > 4000.

Кроме логарифмического профиля в практике расчетов турбулентных течений широко используется степенная аппроксимация опытных данных по распределению скоростей

$$\frac{u}{u_{\text{max}}} = \left(\frac{y}{r_0}\right)^{\frac{1}{n}},\tag{4.62}$$

где *и*<sub>max</sub> – значение скорости на оси трубы.

Показатель степени *n* является функцией числа Re. При Re =  $4000...32, 4 \cdot 10^5$  можно принять *n* = 6...10. Для гидравлически гладкого режима течения *n* = 7.

Зная распределение скорости по сечению трубопровода, можно определить отношение скорости на оси трубы  $u_{\text{max}}$  к среднерасходному значению w. Например для степенного профиля при n = 7  $u_{\text{max}}/w = 1,22$ . Из этой оценки следует, что при турбулентном режиме течения скорость потока распределена по поперечному сечению более равномерно, чем при ламинарном течении ( $u_{\text{max}}/w = 2$ ), что связано с влиянием турбулентного перемешивания.

Приведенные выше формулы распределения скорости соответствуют стабилизированному, то есть полностью развитому течению. Формирование стабилизированного турбулентного потока, как и в рассмотренном выше случае ламинарного течения, происходит постепенно. Длина начального участка составляет 25...40 диаметров (или, как говорят, калибров) трубы.

## 4.5. Местные гидравлические сопротивления

Определение коэффициента потерь полного давления на местных сопротивлениях теоретическими методами затруднено вследствие существенной трехмерности течения. Поэтому коэффициенты  $\xi$  в основном определяют экспериментально<sup>\*</sup> по формуле Вейсбаха по результатам замера перепада давления и расхода. Лишь для отдельных частных случаев в зоне квадратичного сопротивления, где коэффициент потерь не зависит от числа Рейнольдса, а определяется только геометрическими параметрами местного сопротивления, получены теоретические решения. Рассмотрим, в качестве примера, определение коэффициента потерь на внезапном расширении и сужении потока.

Потери на внезапное расширение. В этом случае на уступе канала происходит отрыв потока с образованием вихревых зон в отрывной зоне в углах канала. Схема течения показана на рис. 4.8. Образовавшаяся транзитная струя расширяется и в сечении 2'-2' достигает стенок канала. Распределение скорости в этом сечении еще существенно неоднородно и стабилизируется только в сечении 2-2. На участке течения от сечения 1-1 до сечения 2-2 происходит потеря механической энергии потока, обусловленная преодолением вязких сил, возникающих в вихревой зоне и в процессе стабилизации эпюры скоростей. Существуют также потери механической энергии, обусловленные трением жидкости о стенки канала, которыми будем пренебрегать, считая, что протяженность местного сопротивления невелика.



Рис. 4.8. Течение жидкости в окрестности внезапного расширения

Выразим потери на внезапное расширение при помощи уравнения Бернулли, записанное для сечений 1-1 и 2-2, считая, для простоты, что  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ :

$$\Delta p_{\rm BH,p} = p_1 - p_2 + \frac{\rho}{2} \left( w_1^2 - w_2^2 \right). \tag{4.63}$$

Перепад давлений  $p_1 - p_2$  найдем при помощи уравнения сохранения количества движения, записанного в проекции на ось канала для объема, показанного на рис. 4.8 пунктиром. При этом учтем, что на кольцевой поверхности уступа  $F_{\kappa} = F_2 - F_1$  можно принять давление, равным  $p_1$ . То есть имеем

$$p_1 F_2 - p_2 F_2 = \rho w_2^2 F_2 - \rho w_1^2 F_1.$$
(4.64)

Из (4.64), учитывая, что  $w_1 F_1 = w_2 F_2$ , имеем  $p_1 - p_2 = \rho w_2 (w_2 - w_1).$  (4.65)

<sup>&</sup>lt;sup>\*</sup> Большой объем информации о величинах коэффициентов потерь полного давления ξ для различных типов местных сопротивлений, а также данные, необходимые для расчета потерь на трение, приведены в Справочнике по местным сопротивлениям – И. Е. Идельчик – М.: Машиностроение, 1992 – 672 с.

Подставив (4.65) в (4.63) получим формулу Борда

$$\Delta p_{\rm BH,p} = \frac{\rho}{2} (w_1 - w_2)^2. \tag{4.66}$$

Приводя формулу Борда к виду формулы Вейсбаха, можем записать

$$\Delta p_{\rm BH,p} = \rho \frac{w_1^2}{2} \left( 1 - \frac{w_2}{w_1} \right)^2 = \rho \frac{w_1^2}{2} \left( 1 - \frac{F_1}{F_2} \right)^2. \tag{4.67}$$

Таким образом, для внезапного расширения в квадратичной зоне течения

$$\xi_{\rm BH,p} = \left(1 - \frac{F_1}{F_2}\right)^2. \tag{4.68}$$

В частном случае истечения из трубы в большой резервуар  $F_2 \square F_1$  и  $\xi_{\text{вн. p}} = 1$ . То есть в этом случае теряется весь скоростной напор потока, имеющийся во входном сечении трубопровода.

Потери на внезапное сужение. В этом случае в углах местного сопротивления также образуется отрывная зона. Кроме того отрыв потока происходит и непосредственно на входе в узкую часть трубы, см. рис. 4.9. Транзитная струя, благодаря силам инерции сжимается, образуя сжатое сечение  $F_c$ , а затем снова расширяется, занимая все сечение трубы.



Рис. 4.9. Течение жидкости в окрестности внезапного сужения

Измерение показывает, что основные потери давления происходят на участке расширения транзитной струи за сечением  $F_c$ . Применим к участку потока между сечениями *c*-*c* и 2-2 (см. рис. 4.9) формулу Борда:

$$\Delta p_{\rm суж} = \frac{\rho}{2} (w_c - w_2)^2$$
 (4.69)

или, записывая (4.69) в форме Вейсбаха,

$$\Delta p_{\rm суж} = \frac{\rho}{2} w_2^2 \left( \frac{F_2}{F_c} - 1 \right) = \frac{\rho}{2} w_2^2 \left( \frac{1}{\epsilon} - 1 \right), \tag{4.70}$$

где коэффициент внутреннего сжатия  $\varepsilon = F_c / F_2$  может быть определен по формуле

$$\varepsilon = \frac{1}{1 + \sqrt{1 - F_2 / F_1}}.$$
(4.71)

Из (4.70) и (4.71) находим

$$\xi_{\rm суж} = 1 - \frac{F_2}{F_1} \,. \tag{4.72}$$

Если труба стыкуется с большим резервуаром, то  $F_1 \square F_2$  и  $\xi_{\text{суж}} = 1$ . Для других форм сужения потока коэффициент гидравлического сопротивления можно определить по формуле

$$\xi_{\rm суж} = \xi \left( 1 - \frac{F_2}{F_1} \right), \tag{4.73}$$

где ξ - экспериментальный коэффициент.

# 4.6. Взаимное влияние местных сопротивлений

Формулы для расчета коэффициентов гидравлических потерь на местных сопротивлениях такие, как (4.73) и т. п. получены при условии, что на входе в местное сопротивление имеется полностью развитый профиль скорости. Следовательно, ими можно пользоваться, если между местными сопротивлениями имеются достаточно длинные прямолинейные участки трубопроводов. На практике иногда местные сопротивления располагаются настолько близко друг к другу, что поток между ними не успевает выровняться, поскольку вихреобразования, возникающие при прохождении местного сопротивления, сказываются на значительном расстоянии вниз по течению. Вместе с тем при практических расчетах в большинстве случаев суммарные потери в трубопроводах определяются путем простого суммирования потерь, определенных по формулам типа (4.73).

В случаях, когда расстояние между отдельными местными сопротивлениями меньше длины влияния, для точных расчетов суммарная величина сопротивлений должна быть установлена с помощью специальных экспериментов. Она может оказаться как больше, так и меньше суммы соответствующих единичных сопротивлений в зависимости от длины прямого участка между ними. В качестве примера взаимного влияния местных сопротивлений на рис. 4.10 показано изменение суммарного коэффициента сопротивления двух незакругленных поворотов под углом  $\alpha = 45$  ° в зависимости от длины *l* вставки меду ними.



Рис. 4.10. Взаимное влияние местных сопротивлений

При l/d = 0 суммарная величина коэффициента местного сопротивления двух поворотов равна  $\xi_{\Sigma} = 1,1$ , то есть равна коэффициенту  $\xi$  для одного поворота на 90°. При увеличении l/d до ~ 2 суммарная величина уменьшается до  $\xi_{\Sigma} \approx 0,23$ . При дальнейшем увеличении расстояния до  $l/d \approx 6 \xi_{\Sigma}$  возрастает, стремясь к величине 0,472, равной удвоенному значению коэффициента для одного поворота на 45°.

# 5. ИСТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ И ГАЗА ЧЕРЕЗ ОТВЕРСТИЯ И НАСАДКИ

#### 5.1. Истечение жидкости при постоянном напоре

Рассмотрим истечение жидкости из резервуара в атмосферу через отверстие в тонкой стенке, рис. 5.1. Здесь, как и в случае входа в трубу, наблюдается сжатие струи за отверстием. Причиной этого является инерционность частиц, двигающихся к отверстию изнутри резервуара по радиальным направлениям. За сжатым сечением струя практически не расширяется, а при достаточно большой скорости истечения может распадаться на отдельные капли.



Рис. 5.1. Истечение жидкости из резервуара через отверстие в тонкой стенке

Для вывода формул истечения применим уравнение Бернулли к сечениям *a-а* (свободная поверхность жидкости в резервуаре) и *c-c* (сжатое сечение струи), предполагая, что скорость опускания уровня в резервуаре мала

$$\rho g H + p_0 = p_1 + \rho \frac{\alpha_c w_c^2}{2} + \xi_0 \rho \frac{w_c^2}{2}, \qquad (5.1)$$

где ξ<sub>0</sub> – коэффициент местного сопротивления, обусловленного входом жидкости в отверстие.

Решая это уравнение относительно скорости в сжатом сечении, находим

$$w_c = \phi_0 \sqrt{2\left(gH + \frac{p_0 - p_1}{\rho}\right)}.$$
 (5.2)

где  $\phi_0 = 1/\sqrt{\alpha_c + \xi_0}$  - коэффициент скорости.

Введем коэффициент сжатия струи, определяемый как  $\varepsilon = F_c / F_0$  (где  $F_c$  – площадь сжатого сечения струи;  $F_0$  – площадь отверстия) и коэффициент расхода отверстия, равный  $\eta = \varphi_0 \varepsilon$ . С учетом этих параметров можем записать следующее выражение для расхода через отверстие

$$Q = \eta F_0 \sqrt{2 \left( gH + \frac{p_0 - p_1}{\rho} \right)}.$$
 (5.3)

Средняя скорость на выходе из отверстия найдется, как

$$w = \eta \sqrt{2\left(gH + \frac{p_0 - p_1}{\rho}\right)}.$$
(5.4)

На величину коэффициента расхода влияют числа Фруда  $Fr = 2H/d_0$ , Вебера  $We = 2gHd_0\rho/\sigma$  ( $\sigma$  - коэффициент поверхностного натяжения) и Рейнольдса. Однако при Fr > 10, We = 250...2500 коэффициент  $\eta$  зависит только от числа Рейнольдса. Эта зависимость для круглого отверстия показана на рис. 5.2.



Рис. 5.2. Зависимость коэффициента расхода η, истечения φ и сжатия струи ε от числа Рейнольдса

Параметры струи, вытекающей из отверстия, можно изменять, если истечение организовывать через насадки. Рассмотрим действие цилиндрического насадка, рис. 5.3, *а*.



Рис. 5.3. Насадки, используемые для увеличения расхода

При входе в него струя жидкости сжимается так же, как при истечении через отверстие, однако, поскольку она ограничена боковой поверхностью насадка то

образуется кольцевая вихревая область между поверхностями транзитной струи и трубы. За сжатым сечением струя расширяется и на выходе заполняет все сечение насадка. Поэтому на выходе из насадка поджатия потока нет.

В сжатом сечении образуется вакуум, так как скорость в нем выше, чем в выходном сечении, а давление на выходе равно атмосферному. Следовательно, при истечении через насадок перепад давления от свободной поверхности резервуара до сжатого сечения выше, чем при истечении через отверстие. Таким образом, применение насадка позволяет увеличить расход жидкости по сравнению с истечением через отверстие. Правда в последнем случае появляются дополнительные потери на расширение транзитной струи и на трение, которых нет при истечении через отверстие. Однако при длине насадка  $l_{\rm H} = (3...4)d_{\rm H}$  эти потери много меньше, чем выигрыш от увеличения перепада давления.

Расход при истечении через насадки определяется также по формуле (5.3), где коэффициент расхода  $\eta$  зависит от числа Рейнольдса (как и при истечении через отверстие), а также от относительной длины насадка  $l_{\rm H}/d_{\rm H}$ . Величины  $\eta$  определяются экспериментально. Максимальная величина коэффициента расхода цилиндрического насадка достигается при Re >10<sup>4</sup>,  $l_{\rm H} = (2,5...3)d_{\rm H}$  и равна  $\eta = 0.8...0.82$ .

Эффект увеличения расхода насадком возрастает, если применить конический расходящийся насадок, см. рис. 5.3, б. Конический сходящийся насадок, см. рис. 5.3, в, служит для увеличения как расхода так и скорости струи. Увеличить коэффициент расхода насадка можно и за счет организации плавного входа, что исключит сужение струи, см. рис. 5.3,  $\partial$ , e.

# 5.2. Истечение жидкости из резервуара при переменном напоре

Рассмотрим резервуар площадью поперечного сечения F, заполненный жидкостью до уровня H. Истечение жидкости происходит при понижении уровня через насадок площадью живого сечения f. Начальный объем жидкости равен  $V_0$ , рис. 5.4.



Рис. 5.4. Истечение жидкости при переменном напоре

Допустим, в рассматриваемый момент времени t жидкость находится на уровне h. За промежуток времени dt уровень понизится на величину dh. При этом истечет объем жидкости

$$\mathrm{d} \, V = - \, F \mathrm{d} \, h^*. \tag{5.5}$$

Считая промежуток времени dt бесконечно малым и пренебрегая в течение этого промежутка времени изменением напора, расход жидкости Q в этот период времени можем записать, как

$$Q = \mu f \sqrt{2gh} , \qquad (5.6)$$

где µ – коэффициент расхода насадка.

Тогда элементарное изменение объема d V можем представить как

$$\mathrm{d}V = Q\,\mathrm{d}t = \mu f \sqrt{2gh}\,\mathrm{d}t\,. \tag{5.7}$$

Приравнивая (5.6) и (5.7), получаем уравнение

$$-F \,\mathrm{d}h = \mu f \sqrt{2gh} \,\mathrm{d}t \,. \tag{5.8}$$

Откуда следует

$$dt = -\frac{F dh}{\mu f \sqrt{2gh}}.$$
(5.9)

Интегрируя (5.9) по времени в пределах от t = 0 до  $t = \tau$ , а по уровню в пределах от h = H до h = 0, найдем время истечения жидкости  $\tau$ :

$$\tau = -\int_{H}^{0} \frac{F \,\mathrm{d}h}{\mu f \sqrt{2gh}} = \frac{2F}{\mu f \sqrt{2g}} \sqrt{H} \,. \tag{5.10}$$

Умножим числитель и знаменатель (5.10) на  $\sqrt{H}$  :

$$\tau = \frac{2FH}{\mu f \sqrt{2gH}} \,. \tag{5.11}$$

Заметим, что  $FH = V_0$  это начальный объем жидкости, а  $\mu f \sqrt{2gH} = Q_0$  – расход жидкости при максимальном (начальном) напоре. Тогда отношение этих двух величин есть время истечения объема жидкости  $V_0$  при постоянном напоре *H*. Обозначим его  $\tau_0$ . Тогда можем записать

$$\tau = 2\tau_0. \tag{5.12}$$

То есть время истечения жидкости при переменном напоре в два раза больше времени истечения того же объема жидкости, происходящего при постоянном напоре, равном начальному напору.

Если необходимо определить время, необходимое для понижения уровня не до нуля, а от начального значения до промежуточной величины h, то интегрируя (5.10) в соответствующих пределах, находим

$$\tau = \frac{2F}{\mu f \sqrt{2g}} \left( \sqrt{H} - \sqrt{h} \right). \tag{5.13}$$

Необходимо отметить, что в расчетах мы полагали, что коэффициент расхода насадка не зависит от числа Рейнольдса. При малых величинах уровня, когда скорость истечения падает, данное допущение неверно. Учитывая зависимость скорости истечения жидкости из насадка (5.4), число Рейнольдса можем определить по формуле

<sup>&</sup>lt;sup>\*</sup> Знак минус здесь учитывает то, что уровень понижается, значит d h < 0.

$$\operatorname{Re} = \frac{\sqrt{2g}}{v} d\sqrt{h} , \qquad (5.14)$$

где v – коэффициент кинематической вязкости жидкости.

При Re < 10 время истечения можно с достаточной для практики точностью вычислить по формуле

$$\tau = \frac{2\mu F \nu}{gfd} \lg \frac{H}{h}, \qquad (5.15)$$

где *d* – диаметр насадка.

# 5.3. Истечение газа из объема через отверстие

Найдем формулу для расчета расхода газа при его адиабатическом истечении из сосуда большого размера через отверстие в стенке, рис. 5.5.



Рис. 5.5. К определению расхода газа через отверстие

Используем для этого уравнение Бернулли (3.31), записав его для двух сечений: в сосуде 0–0 и в минимальном сечении струи 1–1. По условию задачи площадь сечения резервуара значительно больше площади отверстия. Поэтому можно пренебречь скоростью движения газа в сечении 0–0. То есть принять  $u_0 = 0$ . Кроме того для газа величина потенциальной энергии «положения» *gz* в большинстве случаев пренебрежимо мала по сравнению с другими членами уравнения (3.31). Не будем также пока учитывать потери энергии на преодоление сил вязкого сопротивления  $\Delta e_{\mu}$ . Тогда можем записать

$$\frac{k}{k-1}\frac{p_0}{\rho_0} = \frac{k}{k-1}\frac{p_1}{\rho_1} + \frac{u_1^2}{2}.$$
(5.16)

Отсюда находим выражение для скорости в минимальном сечении струи

$$u_1 = \sqrt{\frac{2k}{k+1}} \frac{p_0}{\rho_0} \left( 1 - \frac{\rho_0}{\rho_1} \frac{p_1}{p_0} \right).$$
(5.17)

В соответствии с уравнением адиабаты  $\rho_0 / \rho_1 = (p_1 / p_0)^{-1/k}$ . Кроме того, статическое давление в струе  $p_1$  равно давлению в окружающей среде  $p_{\rm H}$ , так как в противном случае внешняя граница струи будет перемещаться под действием перепада давлений  $p_1 - p_{\rm H}$ . То есть имеем равенство  $p_1 = p_{\rm H}$ . Тогда с учетом этих выражений формулу (5.17) можем записать в виде

$$u_{1} = \sqrt{\frac{2k}{k+1} \frac{p_{0}}{\rho_{0}} \left[ 1 - \left(\frac{p_{\rm H}}{p_{0}}\right)^{\frac{k-1}{k}} \right]}.$$
 (5.18)

Расход истекающего газа найдется, как  $G = \rho_1 u_1 F_c$ , где  $F_c$  – площадь струи в минимальном сечении. Подставляя в эту формулу выражение для скорости (5.18) и учитывая равенство  $\rho_1 = \rho_0 (p_1 / p_0)^{1/k} = \rho_0 (p_H / p_0)^{1/k}$ , получим

$$G = F_{\rm c} \sqrt{\frac{2k}{k+1} p_0 \rho_0 \left[ \left(\frac{p_{\rm H}}{p_0}\right)^2 - \left(\frac{p_{\rm H}}{p_0}\right)^{\frac{k+1}{k}} - \left(\frac{p_{\rm H}}{p_0}\right)^{\frac{k+1}{k}} \right]}.$$
 (5.19)

Обозначим для удобства дальнейшего изложения  $p_0/p_{\rm H}$  через  $\pi$ . Функция,  $G = f(\pi_{\rm H})$ , описываемая формулой (5.19), не монотонна. Она имеет максимум, который можно найти из условия  $dG/d\pi = 0$ . Выполняя дифференцирование, получим

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\pi} = \frac{F_{\mathrm{c}}^2}{G} \frac{k}{k+1} \frac{p_0 \rho_0}{\pi} \left( \frac{2}{k} \pi^{\frac{2}{k}} - \frac{k+1}{k} \pi^{\frac{k+1}{k}} \right) = 0.$$
(5.20)

Отсюда находим отношение давлений  $\pi^*$ , соответствующее максимуму функции (5.19)

$$\pi^* = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}}.$$
(5.21)

Тогда максимальное значение расхода  $G^*$  получится из (5.19) при  $\pi = \pi^*$ :

$$G^* = F_{\rm c} \sqrt{k \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{k-1}} \sqrt{p_0 \rho_0}} = p_0 F_{\rm c} \sqrt{k \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{k-1}} \sqrt{\frac{1}{RT_0}}}.$$
 (5.22)

На рис. 5.6 показан график функции  $\overline{G} = G/G^* = f(\pi)$ , построенный с использованием зависимостей (5.19) и (5.22) при k = 1,4.



Рис. 5.6. Зависимость относительного расхода газа от перепада давлений

Как видим при увеличении разрежения (уменьшении  $\pi$ ) расход возрастает до максимального значения  $\overline{G} = 1$ . При дальнейшем уменьшении  $\pi$  в соответствии с (5.19) расход должен падать до 0, как показано на рис. 3.7 синей пунктирной кривой. В действительности этого не происходит. При достижении максимума относительный расход остается постоянным вплоть до разрежения, соответствующего полному вакууму ( $\pi = 0$ ). Для того, чтобы понять причину этого явления, найдем скорость газа в минимальном сечении струи  $u^*$ , соответствующую максимальном му расходу

$$u^{*} = \frac{G^{*}}{F_{c}\rho_{1}} = \sqrt{k\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{k-1}}\frac{p_{0}\rho_{0}}{\rho_{1}^{2}}} = \sqrt{k\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{k-1}}\frac{p_{1}}{\rho_{1}}\left(\frac{\rho_{0}}{\rho_{1}}\right)^{k}\frac{\rho_{0}}{\rho_{1}}} = \sqrt{k\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{k-1}}\frac{p_{1}}{\rho_{1}}\left(\frac{p_{0}}{\rho_{0}}\right)^{\frac{k+1}{k}}} = \sqrt{k\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{k-1}}\frac{p_{1}}{\rho_{1}}\left(\frac{p_{H}}{p_{0}}\right)^{-\frac{k+1}{k}}} = (5.23)$$

$$\sqrt{k\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{k-1}}\frac{p_{1}}{\rho_{1}}\left(\pi^{*}\right)^{-\frac{k+1}{k}}} = \sqrt{k\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{k-1}}\frac{p_{1}}{\rho_{1}}\left(\frac{2}{k+1}\right)^{-\frac{k+1}{k-1}}} = \sqrt{k\frac{p_{1}}{\rho_{1}}} = a_{1}.$$

Как видим, в этом случае скорость в минимальном сечении струи становится равной местной скорости звука  $a_1$ . Физически это означает, что при понижении давления окружающей среды ниже критической величины  $p_{\rm H}^* = p_0 \pi^*$  возмущения разрежения уже не могут поникнуть внутрь сосуда и повлиять на характер течения, так как скорость распространения малых возмущений всегда равна скорости звука.

Нетрудно заметить, что получившаяся величина критического отношения давлений  $\pi^*$  равна газодинамической функции  $\pi(1)^*$ , что также свидетельствует о достижении в минимальном сечении струи скорости звука.

# 6. РАСЧЕТ ТРУБОПРОВОДНЫХ СИСТЕМ

# 6.1. Классификация трубопроводов

Встречающиеся в технике трубопроводы можно условно разделить на две группы:

• простые трубопроводы, состоящие из одной трубы с постоянным по длине расходом;

• сложные трубопроводы, образующиеся в результате последовательного соединения, разветвлений, параллельных соединений, боковых отводов или замыканий в кольца труб разных длин и диаметров.

В основе расчета любого трубопровода лежит задача о расчете простого трубопровода, постоянного по всей длине диаметра. На практике задача расчета трубопроводов встречается обычно в следующих трех постановках.

<sup>\*</sup> См. раздел 3.9.

1. Требуется определить перепад давления  $\Delta p$  в трубопроводе диаметром d и длиной L. Заданы также нивелирные высоты  $z_1$  и  $z_2$  начала и конца трубопровода, расход и теплофизические свойства жидкости.

2. Требуется найти расход жидкости Q через трубопровод, геометрические характеристики которого заданы, и известен перепад давления  $\Delta p$ .

3. Определить диаметр *d*, если все остальные геометрические характеристики трубопровода, а также кинематические, теплофизические параметры жидкости и перепад давления известны.

Исходными уравнениями для расчета трубопроводов при транспортировке несжимаемых жидкостей являются: уравнение Бернулли, уравнение неразрывности, формулы для расчета потерь полного давления по длине трубопроводов, а также на местных сопротивлениях. Для сжимаемых жидкостей дополнительно используется уравнение состояния, например, Клапейрона-Менделеева.

#### 6.2. Расчет простого трубопровода

**Трубопровод постоянного диаметра.** Рассмотрим установившееся течение несжимаемой жидкости по трубопроводу длиной *L* постоянного диаметра *d*. Уравнение Бернулли, записанное для сечений на входе и на выходе из трубопровода, имеет вид

$$\rho g z_1 + p_1 + \frac{\alpha_1 \rho w_1^2}{2} = \rho g z_2 + p_2 + \frac{\alpha_2 \rho w_2^2}{2} + \Delta p_{\rm Tp} + \Delta p_{\rm M}.$$
(6.1)

Так как d = const, то  $\alpha_1 = \alpha_2$ ,  $w_1 = w_2$  и уравнение (6.1) примет вид

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \rho g(z_2 - z_1) + \Delta p_{\rm TP} + \Delta p_{\rm M}, \qquad (6.2)$$

где  $\Delta p$  – перепад статического давления;  $\Delta p_{\rm Tp}$  - потери полного давления на трение по длине трубопровода;  $\Delta p_{\rm M}$  - потери на местных сопротивлениях.

Суммарные потери давления (на трение и местные сопротивления) найдутся, как

$$\Delta p_{\Sigma} = \Delta p_{\mathrm{Tp}} + \Delta p_{\mathrm{M}} = \lambda \frac{L}{d} \frac{\rho w^2}{2} + \sum_{i} \xi_i \frac{\rho w^2}{2} = \frac{\rho w^2}{2} \left(\lambda \frac{L}{d} + \sum_{i} \xi_i\right). \tag{6.3}$$

Среднерасходная скорость движения жидкости находится из соотношения для объемного расхода

$$w = \frac{4Q}{\pi d^2}.\tag{6.4}$$

Подставив (6.4) в (6.3), получим

$$\Delta p_{\Sigma} = \frac{8\rho Q^2}{\pi^2 d^4} \left( \lambda \frac{L}{d} + \sum_i \xi_i \right).$$
(6.5)

Порядок решения сформулированных выше задач расчета трубопровода следующий.

1. Первая задача. Рассчитывается скорость движения жидкости по формуле (6.4) и число Рейнольдса  $\text{Re} = \rho w d / \mu$ . По известному числу Re определяется режим течения и находится коэффициент гидравлического трения  $\lambda$ . Определяются

коэффициенты потерь полного давления на местных сопротивлениях  $\xi_i$  и находятся суммарные потери давления  $\Delta p_{\Sigma}$  по формуле (6.5). По формуле (6.2) определяется искомый перепад статического давления  $\Delta p$ .

2. Вторая задача. В данном случае перепад статического давления  $\Delta p$  задан, поэтому из уравнения (6.2) могут быть определены суммарные потери давления  $\Delta p_{\Sigma}$ . Теперь из уравнения (6.5) может быть определен искомый расход Q. Так как входящий в выражение (6.5) коэффициент трения  $\lambda$  (а зачастую и коэффициент потерь на местном сопротивлении  $\xi_i$ ) зависит от расхода и эта зависимость нелинейная, то в общем случае оно в явном виде относительно Q не разрешается. Поэтому для определения расхода необходимо применить итерационную процедуру, например, по формуле

$$Q^{(n)} = \sqrt{\frac{\pi^2 d^4 \Delta p_{\rm p}}{8\rho}} \left[ \lambda \left( Q^{(n-1)} \right) \frac{l}{d} + \sum_i \xi_i \left( Q^{(n-1)} \right) \right]^{-1}, \tag{6.6}$$

где  $\Delta p_p = \rho g(z_1 - z_2) + p_1 - p_2$  - располагаемый (рабочий) перепад давлений на концах трубопровода, *n* – номер итерации;  $Q^{(n)}$  - расход на *n*-ой итерации.

Пример программы, реализующей итерационную процедуру по формуле (6.6), запускается при нажатии на расположенную ниже кнопку.

3. Третья задача. Данная задача также является итерационной, так как от искомой величины диаметра d зависят коэффициент трения  $\lambda$  и коэффициент местных потерь  $\xi_i$ . Формула итерационного поиска диаметра может быть, например, следующей

$$d^{(n)} = \sqrt{\frac{Q}{\pi}} \sqrt{\frac{8\rho}{\Delta p_{\rm p}}} \left[ \lambda \left( d^{(n-1)} \right) \frac{l}{d^{(n-1)}} + \sum_{i} \xi_{i} \left( d^{(n-1)} \right) \right]}.$$
 (6.7)

Пример программы, реализующей данную итерационную процедуру с дополнительным допущением о независимости  $\xi_i$  от d, запускается при нажатии на ниже расположенную кнопку<sup>\*</sup>.

Начать решение третьей задачи

# 6.3. Расчет сложного трубопровода

**Последовательное соединение труб.** Принципиальная схема такого сложного трубопровода, состоящая из нескольких последовательно соединенных труб различного диаметра, приведена на рис. 6.1.

Уравнение Бернулли для расчетных сечений 1-1 и 2-2 имеет вид

<sup>&</sup>lt;sup>\*</sup> Текст данной программы и упомянутой выше программы расчета простого трубопровода можно посмотреть, открыв встроенный в MS Word редактор Visual Basic For Application.

$$\rho g z_1 + p_1 + \rho \frac{w_1^2}{2} = \rho g z_2 + p_2 + \rho \frac{w_2^2}{2} + \sum_i \left( \Delta p_{\mathrm{Tp}\,i} + \sum_j \Delta p_{\mathrm{M}\,ji} \right), \tag{6.8}$$

где  $\Delta p_{{}_{\mathrm{M}ij}}$  - потери давления на *j*-ом местном сопротивлении в *i*-ой трубе.



Рис. 6.1. Схема сложного трубопровода с последовательным соединением труб

Трубы, входящие в трубопровод, имеют различный диаметр. Поэтому потери на трение должны определяться для каждой *i*-ой трубы отдельно:

$$\Delta p_{\mathrm{Tp}\,i} = \lambda_i \frac{l_i}{d_i} \rho \frac{w_i^2}{2} \,. \tag{6.9}$$

Формула для расчета местных потерь имеет традиционную структуру

$$\Delta p_{\rm M\,i\,j} = \xi_{i\,j} \rho \frac{w_i^2}{2} \,. \tag{6.10}$$

Скорость жидкости в каждой из труб равна

$$w_i = \frac{Q}{F_i} = \frac{4Q}{\pi d_i^2},$$
 (6.11)

где *F<sub>i</sub>* – площадь живого сечения *i* – ой трубы.

Следовательно, скорость в каждой из труб можно выразить через скорость *w<sub>k</sub>* в какой-то одной из труб, принятой за расчетную:

۱

$$w_i = w_k \frac{F_k}{F_i}.$$
(6.12)

Подставив (6.12) в (6.9) и (6.10), получим

$$\Delta p_{\mathrm{Tp}\,i} = \lambda_i \frac{l_i}{d_i} \rho \frac{F_k^2}{F_i^2} \frac{w_k^2}{2}, \quad \Delta p_{\mathrm{M}\,i\,j} = \xi_{i\,j} \rho \frac{F_k^2}{F_i^2} \frac{w_k^2}{2}, \tag{6.13}$$

где  $\xi_{ij}$  - коэффициент потерь давления на *j*-ом местном сопротивлении в *i*-ой трубе.

Сумма статического и скоростного давления представляет собой полное давление потока  $p_0 = p + \rho w^2 / 2$ .

С учетом полученных выражений и последнего соотношения уравнение (6.8) можно записать в виде

$$\Delta p_{\rm p} = \rho F_k^2 \frac{w_k^2}{2} \left[ \sum_i \left( \lambda_i \frac{l_i}{d_i} \frac{1}{F_i^2} + \sum_j \frac{\xi_{ij}}{F_i^2} \right) \right] = \frac{\rho Q^2}{2} \left[ \sum_i \left( \frac{\lambda_i}{F_i^2} \frac{l_i}{d_i} + \frac{1}{F_i^2} \sum_j \xi_{ij} \right) \right], \quad (6.14)$$

где  $\Delta p_{\rm p} = \rho g (z_1 - z_2) + p_{10} - p_{20}$  - располагаемый (рабочий) перепад давления;  $p_{10}$ ,  $p_{20}$  – полное давление в первом и втором сечении трубопровода.

Введем  $\eta_{\text{тр}}$  - коэффициент расхода трубопровода

$$\eta_{\rm TP} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i} \left(\lambda_i \frac{l_i}{d_i} \frac{F_k^2}{F_i^2} + \frac{F_k^2}{F_i^2} \sum_j \xi_{ij}\right)}}.$$
(6.15)

Тогда можем записать следующие выражения

$$w_k = \eta_{\rm Tp} \sqrt{\frac{2\Delta p_{\rm p}}{\rho}}, \quad Q = Q_k = w_k F_k = \eta_{\rm Tp} F_k \sqrt{\frac{2\Delta p_{\rm p}}{\rho}}.$$
 (6.16)

С использованием приведенных формул можно решать сформулированные выше задачи расчета для каждой из труб, входящих в трубопровод. Алгоритм расчета остается такой же, как и для простого трубопровода постоянного диаметра.

**Особенность работы сифонного трубопровода.** Сифон – это самотечный трубопровод, движение жидкости в котором происходит за счет разности уровней, рис. 6.2.



Рис. 6.2. Схема сифонного трубопровода

Уравнение Бернулли, записанное для сечений «вх» и «вых», имеет вид

$$p_{0_{BX}} + \rho g z_{BX} = p_{0_{BbIX}} + \rho g z_{BbIX} + \frac{\rho}{2} \left(\frac{Q}{F}\right)^2 \left(\lambda \frac{l_{\rm Tp}}{d_{\rm Tp}} + 4\xi_{\rm K} + \xi_3\right), \tag{6.17}$$

где F – площадь поперечного сечения трубопровода;  $\xi_{\kappa}$ ,  $\xi_{3}$  - потери полного давления на коленах трубопровода и на задвижке.

Если течение жидкости происходит из одного резервуара в другой, как показано на рис. 6.2, и скоростью изменения уровня жидкости в резервуаре можно пренебречь, то разность полных давлений в начальном и конечном сечениях трубопровода можно связать с разностью уровней в резервуарах. Запишем уравнение Бернулли для сечений 1-1 и «вх».

$$p_a + \rho g z_1 = p_{0BX} + \rho g z_{BX} + \frac{\rho}{2} \left(\frac{Q}{F}\right)^2 \xi_{BX}.$$
 (6.18)

Аналогичное уравнение для сечений 2-2 и «вых» имеет вид

$$p_a + \rho g z_2 = p_{0\text{ BMX}} + \rho g z_{\text{BMX}} + \frac{\rho}{2} \left(\frac{Q}{F}\right)^2 \xi_{\text{BMX}} .$$
(6.19)

Вычитая из (6.18) (6.19) и перегруппировывая члены, получим

$$p_{0BX} + \rho g z_{BX} - \left( p_{0BX} + \rho g z_{BX} \right) = \rho g z_1 - \rho g z_2 - \frac{\rho}{2} \left( \frac{Q}{F} \right)^2 \left( \xi_{BX} + \xi_{BX} \right).$$
(6.20)

Подставим полученное выражение в (6.17). Окончательно будем иметь

$$\rho gz = \frac{\rho}{2} \left(\frac{Q}{F}\right)^2 \left(\lambda \frac{l_{\rm rp}}{d_{\rm rp}} + \xi_{\Sigma}\right),\tag{6.21}$$

где  $\xi_{\Sigma} = \xi_{BX} + 4\xi_{K} + \xi_{3} + \xi_{BbIX}$  - сумма коэффициентов потерь полного давления на местных сопротивлениях трубопровода;  $z = z_1 - z_2$  - разность уровней жидкости в резервуарах.

Формула (6.21) показывает, что расход жидкости через сифон определяется разностью уровней в резервуарах и не зависит от высоты подъема  $h_3$  жидкости. Однако, чем больше высота подъема, тем меньше величина статического давления в данном сечении трубопровода. И если давление упадет ниже давления насыщенных паров  $p_{\text{нас}}$  произойдет нарушение сплошности течения. Это вызовет срыв потока и сифон прекратит работу. Поэтому для нормальной работы сифона необходимо, чтобы давление в самой высокой и одновременно наиболее удаленной от напорного резервуара точке трубопровода, где разрежение наибольшее, превышало давление насыщенных паров жидкости при данной температуре  $p_{\text{нас}}$ . На рис. 9.2 эта точка соответствует сечению 3-3. Записав уравнение Бернулли для сечений 1-1 и 3-3, получим условие нормальной работы сифона

$$p_{3} = p_{0} - \rho g h_{3} - \frac{\rho}{2} \left( \frac{Q}{F} \right)^{2} \left( 1 + \lambda \frac{l_{1-3}}{d} + \xi_{1-3} \right) > p_{\text{Hac}}, \qquad (6.22)$$

где  $l_{1-3}$ ,  $\xi_{1-3}$  - длина трубопровода и сумма коэффициентов местных потерь от входа в трубопровод до сечения 3-3 соответственно.

Для запуска сифона в работу его необходимо предварительно заполнить жидкостью от независимого источника или создать в нем разрежение, достаточное для подъема жидкости на максимальную высоту трубопровода.

Параллельное соединение труб. Рассмотрим трубопровод, имеющий несколько ветвей, включенных параллельно между двумя точками, рис. 6.3.



Рис. 6.3. Параллельное соединение трубопроводов

Будем считать, что для такого трубопровода задан общий расход Q, геометрические характеристики каждой ветви между сечениями А и Б. Найдем распределение расходов  $Q_i$  по ветвям, входящим в параллельный пучок, и перепад давления между точками А и Б  $\Delta p_p$ .

Для каждой из ветвей значение давления в сечениях A и Б одинаково (см. раздел 2.2), следовательно потеря давления и располагаемый перепад  $\Delta p_{\rm p}$  между этими точками также одни и те же. Тогда, пользуясь (6.16), для каждой *i*-ой ветви можем записать

$$Q_i = \eta_{\rm Tp} {}_i F_i \sqrt{\frac{2\Delta p_{\rm p}}{\rho}}, \ i = 1...n.$$
 (6.23)

Сумма расходов по ветвям равна общему расходу *Q*:

$$Q = \sum_{i}^{n} Q_{i} = \sqrt{\frac{2\Delta p_{\rm p}}{\rho}} \sum_{i}^{n} \left(\eta_{\rm Tp\,i} F_{i}\right). \tag{6.24}$$

Система (6.23)...(6.24) замкнута, так как включает n + 1 уравнение для определения n неизвестных расходов и перепада давлений  $\Delta p_p$ . Существенной трудностью при решении этой системы уравнений является ее нелинейность. Поэтому в общем случае ее приходится решать итерационным методом.

С использованием приведенных формул могут быть решены все три сформулированные выше задачи расчета для данного сложного трубопровода.

1. Первая задача – задача определения перепада и распределения расходов по ветвям трубопровода может быть решена следующим образом. Выразим из (6.24)  $\Delta p_{\rm p}$  и организуем итерации по перепаду давления

$$\Delta p_{\mathrm{p}}^{(n+1)} = \frac{\rho}{2} \left[ \frac{Q}{\sum_{i=1}^{n} \eta_{\mathrm{T}pi} \left( Q_i \left( \Delta p_{\mathrm{p}}^{(n)} \right) \right) F_i} \right]^2, \qquad (6.25)$$

где n – номер итерации;  $\Delta p_{p}^{(n)}$  - перепад давления на n-ой итерации.

Так как коэффициент расхода в свою очередь зависит от величины расхода, то есть  $\eta_{\text{тр}i} = \eta_{\text{тр}i}(Q_i)$ , то при выполнении каждой итерации по  $\Delta p_p$  проводим внутренние итерации по расходу  $Q_i$  по формуле

$$Q_{i}^{(s+1)} = \eta_{\mathrm{Tp}\,i} \left( Q^{(s)} \right) F_{i} \sqrt{\frac{2\Delta p_{\mathrm{p}}}{\rho}}, \quad i = 1...n, \qquad (6.26)$$

где *s* – номер внутренней итерации. То есть по алгоритму, аналогичному тому, который был использован при решении второй задачи для простого трубопровода.

Пример программной реализации данного алгоритма расчета приведен в файле <u>pipe\_complex.xls</u>.

2. Вторая задача для рассматриваемого трубопровода проще первой, так как требуется найти распределение расходов по ветвям при заданном перепаде. То есть она представляет собой задачу, решаемую на одной итерации по  $\Delta p_p$  в только что рассмотренном выше случае.

3. Третья задача – итерационный подбор диаметра  $d_{kj}$  (диаметра k-ой трубы в *j*-ой ветви трубопровода) по заданной величине расхода  $Q_i$  и перепаду давления  $\Delta p_p$  представляет собой набор независимых задач третьего типа для сложного трубопровода с последовательным соединением труб, решение которых рассмотрено ранее. Количество этих задач равно количеству параллельных ветвей.

# 6.4. Расчет трубопроводов при движении газов

По сравнению с движением капельных жидкостей движение газов имеет ряд особенностей, обусловленных различиями их физических свойств и, в первую очередь, существенной зависимостью плотности газа от давления. При этом следует различать течения при малых располагаемых перепадах между начальным и конечным сечением трубопровода  $\Delta p$  и при больших перепадах. В первом случае можно пренебречь сжимаемостью газа и рассчитывать движение газа по соотношениям несжимаемой жидкости. Во втором случае, а этот режим наступает при  $\Delta p/p > \sim 5\%$ , пренебрегать сжимаемостью уже нельзя, так как плотность газа в начальном и конечном сечениях отличаются существенно.

**Течение газа с малыми перепадами давления.** Данный режим движения реализуется, например, в воздуховодах систем вентиляции. В этом случае в качестве плотности газа принимается значение, соответствующее среднеарифметической величине давлений на концах рассчитываемого трубопровода:

$$\rho = \frac{p_{\rm cp}}{RT}, \quad p_{\rm cp} = \frac{1}{2} (p_1 + p_2). \tag{6.27}$$

Кроме того, ввиду низкой плотности газа влияние массовых сил на движение газового потока зачастую оказывается пренебрежимо малым по сравнению с действием поверхностных сил. Поэтому в большинстве случаев составляющая давления  $\rho gz$  может быть отброшена и уравнение Бернулли при расчете газоводов принимает вид

$$p_1 + \rho \frac{\alpha_1 w_1^2}{2} = p_2 + \rho \frac{\alpha_2 w_2^2}{2} + \Delta p_{\rm Tp} + \Delta p_{\rm M}, \qquad (6.28)$$

где для расчета потерь полного давления на трение и местные сопротивления могут использоваться те же зависимости, что и для несжимаемой жидкости.

При расчете газовых трубопроводных систем встречаются случаи, когда в различных участках трубопроводов газ имеет существенно различающуюся плотность, что обусловлено различным уровнем давления в данных участках трубопроводной сети. Например, существенно могут отличаться давление и плотность во всасывающем и нагнетательном трубопроводах компрессора, в газовых трубопроводах до и после редукционного клапана и др.

Для расчета таких систем их необходимо разбить на участки, в пределах которых плотность газа можно считать постоянной. После разбиения движение газа по каждому такому участку рассчитывается независимо. При этом для каждого из участков используется приближение несжимаемой жидкости.

**Течение газа с большими перепадами давления.** Такой режим характерен, например, для транспортных газопроводов, протяженных систем водухораспределения и пр. В таких системах, вследствие существенных потерь давления, плотность газа в конце трубопровода значительно меньше, чем в начале, а скорость течения, в соответствии с уравнением неразрывности, – больше.

Часто газовые трубопроводы работают под давлением значительно больше атмосферного при относительно низких скоростях течения. В таких случаях в уравнении Бернулли оказывается возможным пренебречь и динамической составляющей давления. Сказанное можно подтвердить следующим примером. Пусть при течении воздуха реализовались следующие параметры:  $p_1 = 3 \cdot 10^5$  Па,  $p_2 = 1 \cdot 10^5$  Па,  $w_1 = 20$  м/с,  $w_2 = 25$  м/с, T = 300 K. Тогда плотность воздуха в начальном сечении трубопровода  $\rho = p_1/(RT) = 3 \cdot 10^5/(287 \cdot 300) = 3,48$  кг/м<sup>3</sup>. Изменение динамического давления можно оценить величиной

$$\Delta p_{\text{дин}} = \rho \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} = 3,48 \frac{625 - 400}{2} = 392 \text{ IIa}.$$

То есть перепад статического давлений  $p_1 - p_2$  в ~ 500 раз превышает изменение динамического давления.

С учетом изложенного дифференциальное уравнение Бернулли (4.7) для рассматриваемого случая можно записать в виде (считая коэффициенты Кориолиса равными единицы)

$$d p = -d p_{\rm TD}, \tag{6.29}$$

или, используя формулу Дарси-Вейсбаха,

$$d p = -\lambda \rho \frac{w^2}{2} \frac{dl}{d}.$$
 (6.30)

Для интегрирования этого уравнения необходимо знать зависимость плотности  $\rho$ , скорости w и коэффициента трения  $\lambda$  от длины l. Эти зависимости следуют из характера термодинамических процессов, имеющих место при течении газа. Например, в случае адиабатического процесса температура газа будет падать по мере продвижения газа, сопровождающееся его расширением вследствие падения статического давления. На практике часто встречаются случаи течения газа по нетеплоизолированному трубопроводу. С достаточной степенью точности такое течение можно считать изотермическим, в котором температура газа все время равна температуре окружающей среды. Такой расчетный случай значительно проще для решения, чем режим адиабатического течения. Рассмотрим его более подробно.

Заметим, что при стационарном течении (с постоянным массовым расходом *G*) число Рейнольдса при изотермическом течении постоянно по длине трубопровода:

$$\operatorname{Re} = \frac{\rho w d}{\mu} = \frac{\rho w d d 4\pi}{\mu d 4\pi} = \frac{\rho w \pi d^2}{4} \frac{4}{\mu d} = \frac{4G}{\mu d} = \operatorname{const} \pi \mu G = \operatorname{const}.$$

Следовательно, коэффициент трения  $\lambda$  является также постоянной величиной. Скорость *w* и плотность  $\rho$  в любом промежуточном сечении связаны со скоростью *w*<sub>1</sub> плотностью  $\rho_1$  в начальном сечении уравнением неразрывности. То есть имеем

$$\rho = \rho_1 \frac{p}{p_1}, \quad w = w_1 \frac{\rho_1}{\rho} = w_1 \frac{p_1}{p}. \tag{6.31}$$

Первое соотношение (6.31) следует из уравнения состояния газа и условия изотермичности процесса.

Проинтегрируем (6.30) с учетом (6.31) и замечания о постоянстве λ

$$\frac{p_1^2 - p_2^2}{2} = \lambda \frac{l}{d} \frac{w_1^2}{2} \rho_1 p_1, \qquad (6.32)$$

или, учитывая, что  $\rho_1 wF = G$  (где F – площадь сечения трубопровода),

$$\frac{p_1^2 - p_2^2}{2} = \lambda \frac{l}{d} \frac{G^2}{2F^2} \frac{p_1}{\rho_1}.$$
(6.33)

Запишем (6.32) в виде

$$\frac{p_1^2 - p_2^2}{2p_1} = \lambda \frac{l}{d} \frac{w_1^2}{2} \rho_1.$$
(6.34)

Преобразуем левую часть последнего уравнения следующим образом

$$\frac{p_1^2 - p_2^2}{2p_1} = \frac{(p_1 - p_2)(p_1 + p_2)}{2p_1} = \frac{1}{2}(p_1 - p_2)\left(1 + \frac{p_2}{p_1}\right).$$
(6.35)

Запишем давление в конце трубопровода в виде  $p_2 = p_1 + \Delta p$ . Подставляя (6.35) с учетом последнего выражения в уравнение (6.34), получим

$$p_1 - p_2 = \frac{2}{2 - \frac{\Delta p}{p_1}} \lambda \frac{l}{d} \rho_1 \frac{w_1^2}{2}.$$
 (6.36)

Уравнение (6.36) отличается от формулы Дарси-Вейсбаха для определения потерь на трение при движении по трубопроводу несжимаемой жидкости только наличием множителя, зависящим от отношения  $\Delta p / p_1$ . Если  $\Delta p / p_1 < 5\%$ , то пренебрежение этим множителем дает ошибку в определении давления ~ 2,5 %, что допустимо для большинства инженерных расчетов.

Таким образом, необходимость учета сжимаемости при расчете движения газа зависит не от величины абсолютного давления в начале или конце трубопровода, а от относительной величины потерь давления на рассчитываемом участке. При  $\Delta p / p_1 < 5\%$  расчет можно вести с использованием соотношений для несжимаемой жидкости. При  $\Delta p / p_1 > 5\%$  необходимо использовать уравнение типа (6.32). Для расчета коэффициента трения  $\lambda$  в этом случае, как и прежде можно использовать формулы, полученные для несжимаемой жидкости.

Если известен перепад давлений на концах трубопровода, то расход газа можно найти по формуле, следующей из уравнения (6.33)

$$G = F \sqrt{\frac{p_1^2 - p_2^2}{RT} \frac{1}{\lambda} \frac{d}{l}}.$$
 (6.37)

Самотяга. В ряде случаев при расчете газоводов влияние массовых сил может быть существенным, а иногда и определяющим. В качестве примера можно привести расчет систем естественной вентиляции, расчет дымовых труб и т. д. В данных примерах имеет место течение газа более легкого, чем воздух окружающей среды, а входное и выходное сечения канала, по которому движется газ, имеют существенно различающиеся высоты расположения, сообщающиеся с окружающей средой. Это приводит к появлению дополнительного перепада давлений по длине канала. Данное явление называется *самотяга*. Рассмотрим его более подробно.

Пусть имеется канал, в котором реализуется плавноизменяющееся течение газа с плотностью р, отличной от плотности воздуха р<sub>в</sub>, рис. 6.4.



Рис. 6.4. К определению эффекта самотяги

Уравнение Бернулли для сечений 1-1 и 2-2 такого течения имеет вид

$$\rho g z_1 + p_1 + \rho \frac{\alpha_1 w_1^2}{2} = \rho g z_2 + p_2 + \rho \frac{\alpha_2 w_2^2}{2} + \Delta p_{1-2},$$
 (6.38)

где  $\Delta p_{1-2}$  - потери полного давления между сечениями 1-1 и 2-2.

Прибавим и вычтем из каждой части уравнения (6.38)  $p_{\rm B1}$  и  $p_{\rm B2}$  - давление воздуха на высоте расположения сечений 1-1 и 2-2 соответственно:

$$\rho g z_1 + p_1 + \rho \frac{\alpha_1 w_1^2}{2} + p_{B1} - p_{B1} = \rho g z_2 + p_2 + p_{B2} - p_{B2} + \rho \frac{\alpha_2 w_2^2}{2} + \Delta p_{1-2}.$$
 (6.39)

Считая плотность воздуха постоянной, что допустимо при не очень большом перепаде высот, в соответствии с основным уравнением гидростатики, можем записать

$$p_{\rm B1} = p_{\rm a} - \rho_{\rm B} g z_1, \quad p_{\rm B2} = p_{\rm a} - \rho_{\rm B} g z_2.$$
 (6.40)

Подставим (6.40) в (6.39) и перегруппируем члены. В результате получим

$$gz_{1}(\rho - \rho_{\rm B}) + (p_{1} - p_{\rm B1}) + \rho \frac{\alpha_{1}w_{1}^{2}}{2} = gz_{2}(\rho - \rho_{\rm B}) + (p_{2} - p_{\rm B2}) + \rho \frac{\alpha_{2}w_{2}^{2}}{2} + \Delta p_{1-2}.$$
 (6.41)

Используя уравнение (6.41), представим потери полного давления между сечениями 1-1 и 2-2 следующим образом

$$\Delta p_{1-2} = (p_1 - p_{B1}) - (p_2 - p_{B2}) + g(\rho - \rho_B)(z_1 - z_2) + \rho \frac{\alpha_1 w_1^2}{2} - \rho \frac{\alpha_2 w_2^2}{2}.$$
 (6.42)

Вводя обозначения:  $p_{cT}^{\mu_{3}\delta} = p - p_{B}$  - избыточное статическое давление (разность статического давления в потоке и давления воздуха в данном сечении;  $p_{A} = \rho \alpha w^{2}/2$  - динамическое давление потока;  $p_{c} = g(\rho - \rho_{B})(z_{1} - z_{2})$  - избыточное геометрическое давление – самотяга, перепишем (6.42) в сокращенном виде

$$\Delta p_{1-2} = \left( p_{\text{cr1}}^{\text{изб}} - p_{\text{cr2}}^{\text{изб}} \right) + \left( p_{\text{д1}} - p_{\text{д2}} \right) + p_{\text{c}}.$$
(6.43)

Или

$$\Delta p_{1-2} = p_{01}^{\mu_{36}} - p_{02}^{\mu_{36}} + p_{\rm c}, \qquad (6.44)$$

где  $p_0^{\mu_{36}} = p_{cT}^{\mu_{36}} + p_{d} - p_{B}$  - полное избыточное давление в соответствующем сечении.

Таким образом, движение жидкости или газа по трубопроводу осуществляется под действием перепада полного избыточного давления на концах трубопровода и геометрического перепада давления (самотяги). Это перепад давления расходуется на преодоление потерь механической энергии (полного давления) между начальным и конечным сечениями трубопровода.

Избыточное геометрическое давление (самотяга) вызывается стремлением жидкости (газа) опускаться или подниматься в зависимости от того, в какой среде более легкой или более тяжелой данная жидкость (газ) находится. Это давление может быть положительным или отрицательным в зависимости от того, способствует оно или препятствует движению потока.

Необходимо подчеркнуть, что эффект самотяги возможен только с трубопроводных системах, вход и выход которых сообщаются с окружающей средой. В изолированных системах данный эффект невозможен.

#### 6.5. Работа нагнетателя в сети

В подавляющем большинстве встречающихся в технических приложениях случаев движение жидкости либо газа по системе трубопроводов осуществляется под действием нагнетателя (насоса, компрессора, вентилятора и т. д.) с помощью

которого создается определенная разность полных давлений по концам данного участка сети, рис. 6.5.



Рис. 6.5. Участок сети с нагнетателем: Н – нагнетатель

Часть трубопровода до насоса называется всасывающим, после насоса – нагнетательным или напорным. Для определения перепада давления  $\Delta p_{\rm H}$ , который нагнетатель должен создать для обеспечения заданных параметров движения среды в сети трубопроводов, запишем уравнение Бернулли для всего трубопровода в целом, то есть для участка 1-4.

$$\rho g z_1 + p_1 + \rho \frac{\alpha_1 w_1^2}{2} + \Delta p_{\rm H} = \rho g z_4 + p_4 + \rho \frac{\alpha_4 w_4^2}{2} + \Delta p_{1-4}, \qquad (6.45)$$

где  $\Delta p_{1-4}$  - потери полного давления на участке сети от сечения 1-1 до сечения 4-4. Отсюда потребный перепад полного давления, создаваемый нагнетателем равен

$$\Delta p_{\rm H} = \rho g \left( z_4 - z_1 \right) + \left( p_4 - p_1 \right) + \rho \frac{\alpha_4 w_4^2}{2} - \rho \frac{\alpha_1 w_1^2}{2} + \Delta p_{1-4} \tag{6.46}$$

или, обозначая полное давление, как  $p_0 = p + \rho \alpha w^2 / 2$ ,

$$\Delta p_{\rm H} = \rho g \left( z_4 - z_1 \right) + \left( p_{04} - p_{01} \right) + \Delta p_{1-4} \,. \tag{6.47}$$

Правая часть выражений (6.46) и (6.47) представляет собой изменение удельной (отнесенной к 1 м<sup>3</sup>) полной энергии транспортируемой среды при ее переходе от начального к конечному сечению трубопроводной сети плюс необратимые путевые потери этой энергии. Обозначим ее через  $\Delta p_{ceть}$ . Если  $\Delta p_{ceть} > 0$ , то есть запас энергии в начальном сечении сети недостаточен, чтобы обеспечить требуемый уровень энергии (полного давления) в конечном сечении и компенсировать путевые потери, то необходима установка нагнетателя. Величина  $\Delta p_{ceть}$  зависит от расхода Q, так как от расхода зависит как динамическое давление, так и путевые потери, то есть  $\Delta p_{ceть} = f(Q)$ . Эта зависимость называется *характеристикой сети*. Для турбулентного режима течения, пользуясь (6.14) и (6.46), характери-

стику сети можно представить в виде следующей квадратичной зависимости от расхода

$$\Delta p_{\text{сети}} = \rho g \left( z_{\text{вых}} - z_{\text{вх}} \right) + \left( p_{\text{вых}} - p_{\text{вх}} \right) + \frac{\rho}{2} \left[ \sum_{i} \left( \frac{\lambda_i}{F_i^2} \frac{l_i}{d_i} + \frac{1}{F_i^2} \sum_{j} \xi_{ij} \right) \right] Q^2. \quad (6.48)$$

Перепад давления, создаваемый нагнетателем, также в общем случае является функцией расхода  $\Delta p_{\rm H} = f(Q)$ . Эта зависимость называется *характеристикой нагнетателя*. Вид ее зависит от типа и конструкции нагнетателя.

В стационарном режиме, в соответствии с (6.46), перепад давлений, создаваемый нагнетателем, равен перепаду давлений, необходимому для работы сети. То есть расход и перепад давлений в этом режиме равны координатам точки пересечения характеристик сети и нагнетателя (рис. 6.6), которая называется *рабочей точкой*.



Рис. 6.6. Взаимное расположение характеристики сети и нагнетателя

Если трубопроводная сеть представляет собой замкнутую на себя (закольцованную) систему, то в этом случае в уравнении (6.47) мы должны принять  $p_{01} = p_{04}$  и  $z_1 = z_4$ . То есть в закольцованной системе давление, развиваемое на-гнетателем  $\Delta p_{\rm H}$  должно равняться потерям полного давления в сети  $\Delta p_{\rm Tp} + \Delta p_{\rm M}$ .

Если провести анализ уравнения Бернулли для общего случая работы сети с нагнетателем (когда сеть не изолирована от внешней среды), то нетрудно установить, что полное давление, развиваемое нагнетателем, расходуется:

а) на преодоление разности давлений в объемах всасывания и нагнетания;

б) на преодоление избыточного геометрического давления (отрицательной самотяги), то есть на подъем жидкости или газа, который тяжелее воздуха, на высоту от начального сечения сети до конечного сечения (при положительной самотяге - ее вычитают из давления нагнетателя);

в) на создание динамического давления на выходе жидкости (газа) из сети (не из нагнетателя).

То есть полное давление, развиваемое нагнетателем, должно быть равно

$$\Delta p_{\rm H} = \left(p_2^{\rm H36} - p_1^{\rm H36}\right) \pm p_{\rm c} + \left(\Delta p_{\rm BC} + \Delta p_{\rm HAT}\right) + \rho \frac{w_{\rm BbIX}^2}{2}, \qquad (6.49)$$

где  $p_1^{\mu_{36}}$  - избыточное давление в объеме сосуда всасывания;  $p_2^{\mu_{36}}$  - избыточное давление в объеме сосуда нагнетания;  $p_c$  – избыточное геометрическое давление (самотяга);  $\Delta p_{\rm Bc}$  - потери полного давления (сопротивление) на участке всасывания;  $\Delta p_{\rm har}$  - потери полного давления (сопротивление) на участке нагнетания;  $w_{\rm Bbix}$  - скорость потока на выходе из сети в объем нагнетания.

Работа всасывающего трубопровода. Проанализируем работу всасывающего трубопровода насоса. Для этого составим уравнение Бернулли для сечений 1-1 и 2-2 сети, пренебрегая скоростью перемещения уровня в баке всасывания, см. рис. 6.5.

$$p_1 + \rho g z_1 = p_2 + \rho g z_2 + \rho \frac{\alpha_2 w_2^2}{2} + \Delta p_{1-2}$$
(6.50)

ИЛИ

$$p_2 = p_1 - \rho g \left( z_2 - z_1 \right) - \rho \frac{\alpha_2 w_2^2}{2} - \Delta p_{1-2}, \qquad (6.51)$$

где  $\Delta p_{1-2}$  - потери полного давления во всасывающем трубопроводе.

Из уравнения (6.51) видно, что работа всасывающей линии обеспечивается давлением  $p_1$  в баке, которое тратится на подъем жидкости на высоту  $z_2 - z_1$ , создание динамического давления  $p_{d2} = \rho \alpha_2 w_2^2/2$ , преодоление сопротивления трубопровода  $\Delta p_{1-2}$  и должно обеспечивать безкавитационную работу насоса. Если давление на свободной поверхности жидкости атмосферное, тогда всасывающий трубопровод будет работать под разрежением.

#### 6.6. Прямой гидравлический удар в трубах

При больших ускорениях потока жидкости в трубе, например, при быстром открытии или закрытии заслонки клапана, влияние инерционного напора может оказаться превалирующим над другими членами уравнения (4.10). Так при  $dw/dt \rightarrow -\infty \Delta p_v \rightarrow -\infty$ . Поэтому для сохранения смысла уравнения должно выполняться условие  $p_2 \rightarrow \infty$ . Экспериментальные работы показывают, что в реальных условиях даже при практически мгновенном изменении скорости давление  $p_2$  не увеличивается до бесконечности<sup>\*</sup>. Однако рост его может быть весьма существенным.

Резкое изменение давления в трубе, вызванное большими локальными ускорениями жидкости, называют *гидравлическим ударом*. Рассмотрим физическую картину его возникновения.

Пусть в прямой горизонтальной трубе, питающейся из большого резервуара с постоянным уровнем, существует установившийся режим течения со скоростью

Объяснением данного противоречия является допущение несжимаемости жидкости, принятое при выводе уравнения (4.10).

 $w_0$ . Допустим, что в некоторый момент времени клапан, расположенный в конце трубы мгновенно закрывается. Тогда слои жидкости, расположенные около клапана, окажутся благодаря инерции остальной жидкости сжатыми. А так как жидкости относятся к плохо сжимаемым средам, в них резко возрастет давление. Наряду с этим уплотнением слоев жидкости произойдет растяжение стенок трубы и повышение в них напряжений. Это напряженное состояние среды не может быть локализовано, поэтому будет передаваться в слои жидкости, расположенные выше по течению в виде волны.

Волна изменения давления, распространяющаяся вверх по течению, называется *прямой*, а противоположного направления – *обратной*. Поверхность, отделяющая участок распространения ударной волны от участка невозмущенного течения называется *фронтом волны*. Фронт волны гидравлического удара перемещается со скоростью, называемой *скоростью фронта ударной волны*. Время, в течение которого волна проходит двойную длину трубы, называется *фазой* гидравлического удара.

Рассмотрим частный случай гидравлического удара, который возникает в трубе, если время закрытия затвора т меньше фазы удара. Такой гидравлический удар называется *прямым*.

Рассмотрим трубопровод длиной *L* с внутренним радиусом *r* и толщиной стенки δ.

При внезапном останове потока жидкости его кинетическая энергия затрачивается на работу по расширению стенок трубы и на работу сжатия жидкости внутри трубы. Кинетическая энергия жидкости, содержащейся в трубе найдется, как

$$K = m \frac{w^2}{2} = \rho \pi r_0^2 L \frac{w^2}{2}.$$
 (6.52)

Работа, затрачиваемая на перемещение стенок трубы  $dA_1$ , равна произведению силы внутреннего давления жидкости на стенку трубы после удара *F* на деформацию стенки  $d(r - r_0)$ :

$$dA_{1} = F dr = 2\pi r L p d(r - r_{0}).$$
(6.53)

Внутреннее напряжение в стенках трубы в соответствии с законом Гука определится, как

$$\sigma = E_{\rm cr} \delta r = E_{\rm cr} \frac{r - r_0}{r_0}, \qquad (6.54)$$

где  $E_{ct}$  – модуль упругости материала стенки трубы.

Это растягивающее напряжение создается силой внутреннего давления, равной (в расчете 1 м длины) 2 *pr* и действует в продольном сечении трубы. То есть

$$\sigma = \frac{pr}{\delta},\tag{6.55}$$

где δ - толщина стенки трубы.

Из (6.54) и (6.55) находим

$$r - r_0 = \frac{prr_0}{E_{\rm cr}\delta}$$
 или, дифференцируя,  $d(r - r_0) = d\frac{prr_0}{E_{\rm cr}\delta} \approx \frac{r_0^2}{E_{\rm cr}\delta} dp$ . (6.56)

В (6.56) приближенно принято  $rr_0 = r_0^2$ . Подставив (6.56) в (6.53), получим

$$dA_{\rm l} = 2\pi r L p \frac{r_0^2}{E_{\rm cr}\delta} dp. \qquad (6.57)$$

Учитывая, что в приведенных выражениях p – это избыточное давление, и принимая приближенно  $rr_0^2 \approx r_0^3$ , проинтегрируем (6.57):

$$A_{1} = \int_{0}^{p} 2\pi L \frac{rr_{0}^{2}}{E_{\rm cr}\delta} p \,\mathrm{d}\, p \approx 2\pi L \frac{r_{0}^{3}}{E_{\rm cr}\delta} \int_{0}^{p} p \,\mathrm{d}\, p = \frac{\pi L r_{0}^{3} p^{2}}{E_{\rm cr}\delta}.$$
(6.58)

Найдем работу, затрачиваемую на сжатие жидкости A<sub>2</sub>. По определению работы сжатия единицы объема среды имеем

$$\mathrm{d}A_{02} = p\,\mathrm{d}v = p\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{\rho}\right).\tag{6.59}$$

В соответствии с законом Гука изменение напряжения (давления) в жидкости d p при изменении ее объема  $d(1/\rho)$  равно

$$d p = E_{x} d\left(\frac{1}{\rho}\right).$$
(6.60)

Подставив (6.60) в (6.59) и интегрируя полученное выражение, получим

$$A_{02} = \int_{0}^{p} \frac{p}{E_{\pi}} dp = \frac{1}{2} \frac{p^{2}}{E_{\pi}}.$$
 (6.61)

Тогда работа сжатия всего объема жидкости в трубопроводе

$$A_2 = A_{02}\pi r_0^2 L = \frac{p^2}{2E_{\chi}}\pi r_0^2 L.$$
(6.62)

В соответствии с теорией Н.Е Жуковского  $K = A_1 + A_2$ 

$$K = A_1 + A_2 \tag{6.63}$$

ИЛИ

$$\rho \pi r_0^2 L \frac{w^2}{2} = \frac{\pi r_0^3}{E_{\rm cr} \delta} L p^2 + \frac{\pi r_0^2}{2E_{\rm w}} L p^2.$$
(6.64)

Решая (6.64) относительно р, находим

$$p = \rho w \sqrt{\frac{E_{\pi}}{\rho \left(\frac{2r_0 E_{\pi}}{\delta E_{cT}} + 1\right)}}.$$
(6.65)

Величину

$$E_{\rm np} = \frac{E_{\rm m}}{\rho \left(\frac{2r_0 E_{\rm m}}{\delta E_{\rm cr}} + 1\right)} \tag{6.66}$$

называют приведенным модулем упругости.

Скорость распространения волны сжатия-разрежения в упругой среде определяется, как

$$c = \sqrt{E/\rho} , \qquad (6.67)$$

где Е – модуль упругости среды. Тогда величину

$$c_{\rm yg} = \sqrt{\frac{E_{\rm np}}{\rho}} \tag{6.68}$$

можно считать скоростью распространения ударной волны. С учетом введенных обозначений окончательно имеем

$$p = \rho w c_{\rm vII} \,. \tag{6.69}$$

Если время закрытия клапана  $t_{\kappa n}$  больше, чем время фазы гидроудара  $t_{ya}$ , то повышение давления  $\Delta p$  в системе при гидроударе можно оценить по формуле

$$\Delta p = \rho w c_{yA} \frac{t_{yA}}{t_{\kappa n}}.$$
(6.70)

# 7. СКАЧКИ УПЛОТНЕНИЙ ПРИ СВЕРХЗВУКОВОМ ТЕЧЕНИИ ГАЗОВ

#### 7.1. Возникновение скачков уплотнений

Если обратиться к уравнению Гюгонио, то формально может показаться, что возможно осуществить плавное торможение сверхзвукового потока до дозвуковых скоростей, если направить его в сопло с сужающейся по ходу течения сверхзвуковой частью и расширяющейся после критического сечения дозвуковой частью. Однако, как показывают опыты, плавный переход сверхзвукового потока в дозвуковой невозможен, он происходит скачкообразно и сопровождается резким ростом давления и плотности. Поэтому такой переход называют *скачком уплотнения* или *ударной волной*<sup>\*</sup>.

Наличие такого скачкообразного изменения параметров газа - в действительности очень резкого их изменения на участке длины, равной по порядку длине свободного пробега молекулы, - показывает, что здесь имеет место внутренний молекулярный процесс, связанный с переходом кинетической энергии упорядоченного течения газа в кинетическую энергию беспорядочного теплового движения молекул. Этим объясняется разогрев газа при прохождении его из невозмущенной области перед фронтом ударной волны в область возмущенного движения за фронтом ударной волны. Повышение средней квадратичной скорости пробега молекул вызывает также возрастание давления и плотности газа при прохождении его сквозь фронт ударной волны.

В идеальном газе, где отсутствуют силы вязкости, скачок уплотнения представляет собой разрыв газодинамических параметров, то есть протяженность скачка уплотнения равна нулю. Поверхность разрыва может быть плоской или

<sup>&</sup>lt;sup>\*</sup> Скачком уплотнения называют ударную волну, скорость движения фронта которой относительно газа равна нулю.

криволинейной. Если поверхность разрыва располагается под углом к вектору скорости набегающего потока, то скачок уплотнения называется *косым*. При нормальной ориентации поверхности разрыва относительно вектора скорости скачок уплотнения называется *прямым*.

Причину возникновения ударных волн в идеальном газе можно показать на следующем качественном примере. Представим себе (рис. 7.1) теплоизолированную от внешней среды цилиндрическую трубу бесконечной длины, вдоль которой перемещается поршень.



Рис. 7.1. Ударная волна, создаваемая поршнем в идеальном газе

Пусть вначале поршень и газ неподвижны, а затем поршень мгновенно приобретает некоторую скорость  $u_0$  и перемещается с этой скоростью влево, сжимая находящийся перед ним газ. Возникающее при этом возмущение (сжатие газа) будет распространяться по трубе.

Распространение возмущений, создаваемых поршнем, можно рассматривать как совокупность непрерывно следующих друг за другом звуковых волн, причем каждая последующая волна перемещается по газу, возмущенному предыдущими волнами. Но в рассматриваемом адиабатическом и изоэнтропическом движении сжатие газа сопровождается его подогревом, а скорость распространения звука возрастает с температурой. Отсюда заключим, что каждая последующая волна будет перемещаться относительно невозмущенного газа быстрее, чем предыдущая. Волны будут догонять друг друга, складываться и образовывать одну обладающую конечной интенсивностью волну сжатия - ударную волну.

Заметим, что при движении поршня влево за ним образуется разрежение, которое будет распространяться вправо от поршня также волновым образом. Но в этом случае волны уже не будут нагонять друг друга, так как последующая волна пойдет по газу, охлажденному предыдущей волной, и скорость распространения последующей волны будет меньше скорости предыдущей. Из этого рассуждения следует, что существование скачков разрежения невозможно.

Скачки уплотнения могут образовываться, как при течениях в каналах, так и при внешнем обтекании тел, при взаимодействии сверхзвуковых струй с преградами и т. д. На рис. 7.2 показаны примеры течений с образованием скачков уплотнений.

Протяженность скачка уплотнения в реальных газах имеет конечную величину, однако она настолько мала по сравнению с характерными размерами области течения, что и в этом случае можно говорить о разрыве газодинамических параметров.



Рис. 7.2. Примеры визуализации течений с образованием ударных волн: *а* – модель самолета при *M* = 1,1; *б*– процесс запуска сопла: сверхзвуковой поток, разогнавшийся в расширяющейся части, тормозится при взаимодействии с еще неподвижным газом окружающей среды с образованием системы скачков уплотнения

# 7.2. Прямой скачок уплотнений

Определим, как изменяются параметры газа при прохождении ударной волны. Для того, чтобы сделать картину движения газа через ударную волну стационарной, обратим движение - сообщив мысленно всей трубе вместе с движущимся газом поступательное движение вправо со скоростью D навстречу поршню. Тогда будем иметь неподвижный скачок уплотнения, на который натекает невозмущенный газ со скоростью  $u_1 = D$ . За скачком газ движется со скоростью  $u_2 = D - u_0$ , рис 7.3. Выделим сечениями 1 и 2 объем газа, примыкающий к плоскости скачка уплотнения, и запишем применительно к нему выражения для законов сохранения.

$$1 \qquad \begin{array}{c|c} p = p_{1} & p = p_{2} \\ u_{1} = D & u_{2} = D - u_{0} \\ \hline \rho = \rho_{1} & \rho = \rho_{2} \\ T = T_{1} & T = T_{2} \end{array} \qquad 2$$

Рис. 7.3. Изменение параметров газа при прохождении скачка уплотнения

В силу предполагаемой одномерности течения имеем:

• уравнение сохранения массы (неразрывности)

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2; \tag{7.1}$$

• уравнение сохранения количества движения

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2; \tag{7.2}$$

• уравнение сохранения энергии

$$\frac{k}{k-1}\frac{p_1}{\rho_1} + \frac{u_1^2}{2} = \frac{k}{k-1}\frac{p_2}{\rho_2} + \frac{u_2^2}{2}.$$
(7.3)
С использованием полученных выражения найдем уравнение, связывающее плотности и давления при прохождении скачка уплотнений, исключив из рассмотрения скорости  $u_1$  и  $u_2$ . Для этого перепишем уравнение количества движения в виде

$$p_1 - p_2 = \rho_2 u_2^2 - \rho_1 u_1^2 = \rho_1 u_1 (u_2 - u_1).$$
(7.4)

Умножим обе части этого равенства на выражения: справа на

$$\frac{u_2 + u_1}{\rho_1 u_1},\tag{7.5}$$

а слева – на эквивалентное ему выражение

$$\frac{u_2}{\rho_1 u_1} + \frac{1}{\rho_1} = \frac{u_2}{\rho_2 u_2} + \frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_1}.$$
(7.6)

Тогда получим

$$(p_1 - p_2)\left(\frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_1}\right) = u_2^2 - u_1^2.$$
 (7.7)

С другой стороны из уравнения баланса энергии следует

$$u_2^2 - u_1^2 = \frac{2k}{k - 1} \left( \frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} \right)$$
(7.8)

Приравнивая обе части (7.7) и (7.8) найдем

$$(p_1 - p_2)\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right) = \frac{2k}{k - 1}\left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2}\right).$$
 (7.9)

Группируя в этом равенстве члены с  $p_1$  и  $p_2$  найдем выражение для ударной адиабаты Гюгонио

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{(k+1)\rho_2 - (k-1)\rho_1}{(k+1)\rho_1 - (k-1)\rho_2} = \frac{(k+1)\rho_2/\rho_1 - (k-1)}{k+1 - (k-1)\rho_2/\rho_1}.$$
(7.10)

Данное выражение отличается от уравнения адиабаты Пуассона (2.82), что, на первый взгляд, противоречит тому факту, что процесс в скачке уплотнения мы считали адиабатическим. Однако, надо иметь в виду, что адиабата Пуассона справедлива в изоэнтропическом неразрывном течении вдоль линии тока. Здесь мы имеем дело с разрывным течением. Следовательно, при прохождении скачка уплотнения энтропия потока должна возрастать, то есть происходит необратимое преобразование механической энергии в тепловую. Действительно, сравнив величины энтропии до и после скачка уплотнения, получаем

$$s_{2} - s_{1} = \frac{R}{k - 1} \ln\left[\left(\frac{p_{2}}{\rho_{2}^{k}}\right) - \ln\left(\frac{p_{1}}{\rho_{1}^{k}}\right)\right] = \frac{R}{k - 1} \ln\left[\frac{p_{2}}{p_{1}}\left(\frac{\rho_{1}}{\rho_{2}}\right)^{k}\right] > 0.$$
(7.11)

График ударной адиабаты в сравнении с адиабатой Пуассона показан на рис. 7.4.

Как видно из рис. 7.4, при  $\rho_2/\rho_1 > 1$  ударная адиабата располагается выше адиабаты Пуассона. Следовательно, выражение в квадратных скобках в (7.11) больше единицы и  $s_2 > s_1$ .



Рис. 7.4 Сравнение ударной адиабаты и адиабаты Пуассона

Из (7.11) и рис. 7.4 также следует, что возникновение скачков разрежения, то есть  $p_2/p_1 < 1$  и  $\rho_2/\rho_1 < 1$ , невозможно. В этом случае ударная адиабата располагается ниже изоэнтропической. То есть выражение в квадратных скобках меньше единицы и тогда  $s_2 < s_1$ , что противоречит второму началу термодинамики.

Как следует из (7.11), ударная адиабата имеет асимптоту

$$\frac{\rho_2}{\rho_1}\Big|_{p_2/p_1 \to \infty} = \frac{k+1}{k-1}.$$
(7.12)

Это означает, что даже при бесконечном сжатии  $p_2/p_1 \rightarrow \infty$  рост плотности в ударной волне ограничен. Так при k = 1,4 плотность в скачке уплотнения может возрасти только в 6 раз.

Рассмотрим теперь, как изменяются другие параметры потока при прохождении скачка уплотнения.

Из условия сохранения полной энтальпии (7.3) следует сохранение температуры торможения газа  $T_0$ , а также, следовательно, и  $a_0$ ,  $a^*$  и  $T^*$ :

$$T_{01} = T_{02}, \quad T_1^* = T_2^*, \quad a_{01} = a_{02}, \quad a_1^* = a_2^*.$$
 (7.13)

Найдем связь между скоростями газа  $u_1$  и  $u_2$  до и после скачка уплотнения. Перепишем уравнение сохранения количества движения с учетом уравнения неразрывности в виде

$$u_1 - u_2 = \frac{p_2}{\rho_2 u_2} - \frac{p_1}{\rho_1 u_1}.$$
(7.14)

Уравнение сохранения энергии, записанное для каждой зоны, с учетом соотношения  $a_0^2 = a^{*2} (k+1)/2$  можно представить в виде

$$\frac{u_i^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p_i}{\rho_i} = \frac{a_{0i}^2}{k-1} \equiv a_i^{*2} \frac{k+1}{2(k-1)}, \quad i = 1, 2.$$
(7.15)

Выразим отсюда отношение *р*/р для каждой зоны

$$\frac{p_1}{\rho_1} = a^{*2} \frac{k+1}{2k} - \frac{k-1}{2k} u_1^2, \quad \frac{p_2}{\rho_2} = a^{*2} \frac{k+1}{2k} - \frac{k-1}{2k} u_2^2$$
(7.16)

и подставим в (7.14)

$$u_1 - u_2 = \frac{1}{u_2} \left( a^{*2} \frac{k+1}{2k} - \frac{k-1}{2k} u_2^2 \right) - \frac{1}{u_1} \left( a^{*2} \frac{k+1}{2k} - \frac{k-1}{2k} u_1^2 \right).$$
(7.17)

После преобразований (7.17) принимает вид

$$\frac{k+1}{2k}(u_1 - u_2)\left(1 - \frac{a^{*2}}{u_1 u_2}\right) = 0.$$
(7.18)

Так как в скачке уплотнения  $\rho_2 > \rho_1$ , то в соответствии с уравнением неразрывности  $u_1 > u_2$  и тогда из (7.18) следует формула Прандтля

$$u_1 u_2 = a^{*2}$$
 или  $\lambda_1 \lambda_2 = 1.$  (7.19)

Так как  $u_1 > u_2$ , то из (7.19) следует, что

$$u_1 > a > u_2$$
 или  $\lambda_1 > 1 > \lambda_2$ . (7.20)

То есть при движении газа до прохождения прямого скачка уплотнений поток является сверхзвуковым, а после скачка – дозвуковым. Можно сказать, что прямой скачок уплотнения является формой перехода от сверхзвукового течения к дозвуковому.

Определим изменение статического давления при прохождении прямого скачка уплотнений  $\Delta p / p_1 = (p_2 - p_1) / p_1$ . Для этого используем уравнения сохранения массы (7.1), количества движения (7.2) и формулу Прандтля:

$$\frac{p_2 - p_1}{p_1} = \frac{\rho_1 u_1^2 - \rho_2 u_2^2}{p_1} = \frac{\rho_1 u_1^2}{p_1} \left(1 - \frac{u_2}{u_1}\right) = k \frac{u_1^2}{a_1^2} \left(1 - \frac{u_1 u_2}{u_1^2}\right) = k M_1^2 \left(1 - \frac{1}{\lambda_1^2}\right). \quad (7.21)$$

Применив формулу перехода от числа Маха к скоростному коэффициенту (3.113) и обратного перехода (3.114), окончательно получаем

$$\frac{\Delta p}{p_1} = \frac{2k}{k+1} \frac{\lambda_1^2 - 1}{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_1^2}, \quad \frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2k}{k+1} \frac{\lambda_1^2 - 1}{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_1^2}, \quad (7.22)$$

И

$$\frac{\Delta p}{p_1} = \frac{2k}{k+1} \left( M_1^2 - 1 \right), \quad \frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2k}{k+1} \left( M_1^2 - 1 \right) = \frac{2k}{k+1} M_1^2 - \frac{k-1}{k+1}. \tag{7.23}$$

Скорость ударной волны и спутного потока. Определим скорость распространения ударной волны D по неподвижному газу и скорость потока возмущенного газа  $u_{cn}$ , возникающего за ударной волной, называемого *спутным потоком*. Вспоминая, что при выводе расчетных соотношений для скачка уплотнений мы применили прием обращения движения, можем записать

$$D = u_1, \quad u_{\rm cfi} = D - u_2 = u_1 - u_2. \tag{7.24}$$

За меру интенсивности скачка, а следовательно, и ударной волны, примем число Маха  $M_1$  и сжатие газа в скачке  $p_2/p_1$ . В соответствии с определением числа Маха и выражением (7.23) можем записать:

$$M_1 = \frac{D}{a_1}, \qquad \frac{p_2}{p_1} = \frac{2k}{k+1}M_1^2 - \frac{k-1}{k+1}.$$
(7.25)

Отсюда находим зависимость скорости ударной D волны от ее интенсивности

$$D = M_1 a_1 = a_1 \sqrt{\frac{k-1}{2k} + \frac{k+1}{2k} \frac{p_2}{p_1}}.$$
 (7.26)

Из этой формулы следует:

• скорость распространения ударной волны по отношению к неподвижному газу всегда больше скорости звука в невозмущенном газе;

• звуковую волну можно рассматривать, как ударную волну очень малой интенсивности, так как при этом имеем

$$D = a_1$$
 при  $M_1 = 1$  или  $p_2 = p_1$ . (7.27)

Для определения скорости спутного потока используем формулу Прандтля. С учетом (7.24) можем записать

$$u_{\rm cn} = u_1 - \frac{a^{*2}}{u_1}.\tag{7.28}$$

Для критической скорости звука можем записать равенство

$$a^{*2} = \frac{2}{k+1}a_0^2 = \frac{2}{k+1}a_1^2\frac{T_0}{T_1} = \frac{2}{k+1}\left(1 + \frac{k-1}{2}M_1^2\right)a_1^2.$$
 (7.29)

Подставив (7.29) в (7.28) и учитывая, что  $u_1 = M_1 a_1$ , получим

$$u_{\rm cn} = M_1 a_1 - \frac{2}{k+1} \left( 1 + \frac{k-1}{2} M_1^2 \right) \frac{a_1^2}{M_1 a_1} = \frac{2}{k+1} a_1 \left( M_1 - \frac{1}{M_1} \right).$$
(7.30)

Если подставить в (7.30) число Маха, выраженное из (7.23), то получим связь скорости  $u_{cn}$  со сжатием газа в волне  $p_2/p_1$ :

$$u_{\rm cm} = \sqrt{\frac{2}{k}} \frac{\frac{p_2}{p_1} - 1}{\sqrt{k - 1 + (k+1)\frac{p_2}{p_1}}} a_1.$$
(7.31)

Зависимость скорости ударной волны и спутного потока от интенсивности ударной волны для воздуха с температурой 300 К показана на рис. 7.5.

Представленные данные показывают, что скорость спутного потока за ударной волной может быть очень большой. Так, например, ударная волна, несущая относительное сжатие воздуха  $p_2/p_1 = 1,22$ , могла бы вызвать спутный поток со скоростью 50 м/с. Отсюда также видно, сколь ничтожные сжатия воздуха несут с собой обычные звуковые волны, почти совершенно не смещающие частицы воздуха.



Рис. 7.5. Скорость спутного потока за ударной волной

#### 7.3. Косые скачки уплотнения

Помимо прямых скачков уплотнения, встречаются и так называемые *косые скачки уплотнения*. Фронт косого скачка располагается наклонно к направлению потока (рис.7.6). Косой скачок получается в том случае, когда, пересекая фронт скачка, сверхзвуковой газовый поток должен изменить свое направление, например, при косом натекании сверхзвукового потока на преграду.

При пересечении потоком фронта косого скачка модуль нормальной составляющей скорости уменьшается, а модуль тангенциальной составляющей остается неизменным.



Рис. 7.6. Схема косого скачка уплотнения

Формально косой скачок уплотнения может быть сведен к прямому скачку, который сносится вместе с потоком газа вбок вдоль фронта скачка со скоростью, равной тангенциальной составляющей скорости. Из этого следует, что при малых углах α сверхзвуковой поток перед скачком *может оставаться сверхзвуковым* и после прохождения косого скачка уплотнения.

При одной и той же скорости набегающего потока косой скачок уплотнения всегда бывает слабее прямого. Для отношений давления в косом скачке может быть получено соотношение

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2k}{k+1} M_1^2 \sin^2 \alpha - \frac{k-1}{k+1},$$
(7.32)

откуда видно, что в предельном случае, когда косой скачок переходит в прямой ( $\alpha = 90^{\circ}$ ), увеличение давления получается максимальным.

В другом предельном случае, когда угол наклона скачка к направлению потока перед ним определяется условием

$$\sin \alpha_0 = \frac{1}{M_1} \tag{7.33}$$

косой скачок вырождается в бесконечно слабую волну ( $p_1 \approx p_2$ ). Разъясним этот факт несколько подробнее. Пусть в некоторой точке «О» сверхзвукового газового потока возникло бесконечно малое возмущение давления (рис. 7.7).



Рис. 7.7. Образование волн слабых возмущений

Слабая волна сжатия (или разрежения) побежит из центра возмущения во все стороны со скоростью звука a. Через единицу времени (t = 1 с) фронт волны будет представлять собой сферу радиуса r = a. Однако вся масса газа, в которой возникла волна, сносится по потоку со сверхзвуковой скоростью u > a. По этой причине слабые волны давления никогда не выйдут за пределы конуса, поверхность которого является огибающей для сферических волн. Образующая такого конуса носит название *волны Маха* или *характеристики*. Угол  $\alpha_0$  между образующей и осью называется *углом Маха* или *углом распространения слабых возмущений*. Этот угол, как видно из рис. 7.7, определяется равенством

$$\sin \alpha = \frac{a}{u} = \frac{1}{M}.$$
(7.34)

Итак, фронт очень слабого косого скачка уплотнения располагается по отношению к набегающему потоку под углом  $\alpha_0$ , который определяется равенством (7.33). Сильные возмущения, как было показано выше, распространяются со сверхзвуковой скоростью, в связи с чем фронт сильного скачка образует с набегающим потоком больший угол, чем характеристика:  $\alpha > \alpha_0$ . Диапазон изменения угла  $\alpha$  для косого скачка уплотнения определяется, таким образом, следующими пределами:

$$90^{\circ} \ge \alpha \ge \alpha_0. \tag{7.35}$$

Из изложенного видно, что полное торможение сверхзвукового потока требует либо одного прямого скачка, либо системы из нескольких косых скачков<sup>\*</sup>.

Пример визуализации течения с образованием косых скачков уплотнения показан на рис. 7.8.

<sup>\*</sup> Система косых скачков обычно завершается слабым прямым скачком уплотнения.



Рис. 7.8. Комбинация конуса и цилиндра в сверхзвуковом полете: *M* = 1,84. Конические (косые) скачки уплотнения на вершине конуса. Пограничный слой за вершиной конуса становится турбулентным и порождает волны Маха при обтекании углов модели

#### 7.4. Скачки конденсации

Выше были рассмотрены адиабатические скачки уплотнений, которые могут возникать в сверхзвуковых потоках. В некоторых технических устройствах в потоках наблюдается скачкообразное изменение параметров при внезапном подводе теплоты. Такие процессы возможны при горении смеси или конденсации переохлажденного пара, текущего в соплах. Если длина участка, на котором происходит подвод теплоты, очень мала по сравнению с размером области, где наблюдается явление, то можно зону конденсации рассматривать, как поверхности разрыва. В таком случае можно считать, что бесконечно тонкий фронт скачка конденсации разделяет области, где движется переохлажденный и влажный пар.

Рассмотрим плоский скачок конденсации в предположении: 1) пар перед скачком переохлажден и не содержит капелек жидкости; 2) насыщенный пар и мелкие капельки жидкости за скачком находятся в тепловом равновесии; 3) скорости капелек жидкости за скачком равны скорости пара; 4) переохлажденный и насыщенный пар подчиняется уравнению состояния Клапейрона  $p = \rho RT^*$ .

В скачке конденсации теплота выделяется при конденсации части текущего пара, и поэтому полная энергия потока до и после скачка остается постоянной.

Обозначим индексом «1» параметры перед скачком, а индексом «2» – за скачком и запишем уравнения сохранения для пара, проходящего скачок. Уравнение неразрывности

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 / (1 - \varphi), \tag{7.36}$$

где  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  – плотность пара до и после скачка;  $u_1$ ,  $u_2$  – скорость пара до скачка и парожидкостной смеси после скачка;  $\phi$  – массовая доля жидкой фазы в парожидкостной смеси после скачка.

Уравнение сохранения количества движения

$$p_2 - p_1 = \rho_1 u_1 (u_1 - u_2). \tag{7.37}$$

<sup>&</sup>lt;sup>\*</sup> При этом, естественно, учитываем, что давление и температура насыщенного пара связаны условием фазового равновесия, то есть не могут выбираться произвольно.

Здесь учтено, что удельный расход (расход через 1 м<sup>2</sup> живого сечения) до и после скачка одинаков в силу уравнения неразрывности.

Уравнение сохранения энергии

$$h_0'' = h_1'' + \frac{u_1^2}{2} = (1 - \varphi)h_2'' + \varphi h_2' + \frac{u_2^2}{2}, \qquad (7.38)$$

где  $h_0''$ ,  $h_1''$  – энтальпия адиабатически заторможенного пара и пара перед скачком соответственно;  $h_2''$ ,  $h_2'$  – энтальпия пара и конденсата за скачком соответственно.

Учитывая, что повышение температуры пара за скачком конденсации не очень существенно (несколько десятков градусов), примем теплоемкость пара  $c_p$  в этом диапазоне температур постоянной. Тогда можем записать

$$h_2'' - h_1'' = c_p \left( T_2 - T_1 \right). \tag{7.39}$$

Энтальпии воды на границе фазового перехода связаны известным термодинамическим соотношением

$$h'' - h' = r, (7.40)$$

где *r* – скрытая теплота фазового перехода.

Подставив (7.39) и (7.40) в (7.38), запишем уравнение сохранения энергии в виде

$$\frac{u_1^2}{2} - \frac{u_2^2}{2} = c_p \left( T_2 - T_1 \right) - \varphi r \,. \tag{7.41}$$

Записанная система уравнений (7.36), (7.37), (7.41), дополненная двумя уравнениями состояния (для параметров до и после скачка) все равно остается неполной. Для ее замыкания необходимо использовать уравнение фазового равновесия Клапейрона-Клаузиуса либо таблицы насыщенного пара.

Выразим массовую долю конденсата после скачка из уравнения (7.36)

$$\varphi = 1 - \frac{\rho_2 u_2}{\rho_1 u_1},\tag{7.42}$$

или, применив уравнение состояния,

$$\varphi = 1 - \frac{p_2}{p_1} \frac{T_1}{T_2} \frac{u_2}{u_1},\tag{7.43}$$

Подставим это выражение в (7.41) и запишем получившееся уравнение в виде

$$\frac{1}{2}u_1^2 \left[ 1 - \left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2 \right] = c_p \left(T_2 - T_1\right) - r \left(1 - \frac{p_2}{p_1} \frac{T_1}{T_2} \frac{u_2}{u_1}\right).$$
(7.44)

Уравнение сохранения количества движения (7.37) преобразуем следующим образом

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{\rho_1}{p_1} u_1^2 \left( 1 - \frac{u_2}{u_1} \right) = 1 + k \frac{u_1^2}{kRT_1} \left( 1 - \frac{u_2}{u_1} \right) = 1 + k M_1^2 \left( 1 - \frac{u_2}{u_1} \right), \quad (7.45)$$

где *M*<sub>1</sub> – число Маха перед скачком.

Обозначим через ε и τ степень повышения давления и температуры в скачке

$$\varepsilon = \frac{p_2}{p_1}, \quad \tau = \frac{T_2}{T_1}.$$
 (7.46)

С учетом введенных обозначений уравнение сохранения количества движения (7.45) после преобразований примет вид

$$\frac{u_2}{u_1} = 1 - \frac{\varepsilon - 1}{kM_1^2}.$$
(7.47)

Подставим (7.46) и (7.47) в (7.44) и поделим обе части на *RT*<sub>1</sub>

$$\frac{kM_{1}^{2}}{2} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\varepsilon - 1}{kM_{1}^{2}} \right)^{2} \right] = \frac{k}{k - 1} (\tau - 1) - \frac{kr}{a_{1}^{2}} \left[ 1 - \frac{\varepsilon}{\tau} \left( 1 - \frac{\varepsilon - 1}{kM_{1}^{2}} \right) \right].$$
(7.48)

Здесь учтено, что  $u_1^2/(kRT_1) = M_1^2$  и  $c_p/R = k/(k-1)$ .

После преобразований получаем уравнение скачка конденсации в виде

$$\frac{\varepsilon - 1}{kM_1^2} \left( \frac{\varepsilon r}{\tau a_1^2} - \frac{\varepsilon - 1}{2k} \right) = \frac{\tau - 1}{k - 1} - \frac{\varepsilon - 1}{k} - \frac{r}{a_1^2} \left( 1 - \frac{\varepsilon}{\tau} \right).$$
(7.49)

Порядок расчета параметров в скачке конденсации следующий. Задаем параметры переохлажденного пара перед скачком  $p_1$ ,  $T_1$ . Выбираем степень повышения давления в скачке  $\varepsilon = p_2/p_1$ , то есть давление за скачком конденсации  $p_2$ . Поскольку пар за скачком находится в фазовом равновесии с жидкостью, то по давлению  $p_2$  с помощью таблиц насыщенного пара находим температуру насыщения  $T_2$  и затем  $\tau = T_2/T_1$ . Теперь из уравнения (7.49) легко определяется единственная неизвестная – число Маха перед скачком  $M_1$ . Расчет удобно вести при фиксированных параметрах перед скачком, то есть при постоянной величине переохлаждения пара:

$$\Delta T = T_{s1} - T_1, \tag{7.50}$$

где  $T_{s1}$  – температура насыщенного пара, соответствующая давлению перед скачком (находится по таблицам насыщенного пара).

Задавая различные степени сжатия, можно построить зависимость их от числа  $M_1$  перед скачком при постоянной величине переохлаждения  $\Delta T$ . Пример результатов расчетов при  $\Delta T = 30$  ° приведен на рис. 7.9.



Рис. 7.9. Степень повышения давления в скачке конденсации ( $p_1 = 10^6 \text{ Пa}$ )

Ветвь *ab* кривой на рис. 7.9 соответствует «чистому» скачку конденсации, причем поток после скачка остается сверхзвуковым. Ветвь *ac* соответствует совмещению скачка конденсации с адиабатическим скачком. В данном случае скорость за скачком дозвуковая. Точка *a* отвечает минимально возможному числу  $M_1$  перед скачком при данном переохлаждении. При меньшем числе  $M_1$  поток не может воспринять то количество теплоты, которое выделяется при полной конденсации, соответствующей данному переохлаждению перед скачком.

## 8. ПОНЯТИЕ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ. ОБТЕКАНИЕ ТЕЛ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ

# 8.1. Основные физические представления о пограничном слое. Толщина пограничного слоя и толщина вытеснения

Представим твердое тело, которое обтекается вязкой жидкостью, рис. 8.1. Вблизи поверхности тела образуется тонкий слой жидкости, в пределах которого скорость потока изменяется от нуля на поверхности до скорости, близкой к скорости набегающего потока  $u_0$ . Этот слой жидкости называется *пограничным слоем*. Заторможенные частицы жидкости пограничного слоя образуют за телом *гидродинамический след*, где сохраняется неравномерное распределение скоростей. Внутри пограничного слоя и следа, где градиенты скорости значительны, силой вязкого трения пренебрегать нельзя (силы инерции и вязкостные силы соизмеримы). Вне пограничного слоя и следа за телом, где градиенты скорости малы, силу вязкостного сопротивления можно не учитывать и жидкость считать идеальной, а поток безвихревым (потенциальным).



Рис. 8.1. Схема течения с образованием пристенного пограничного слоя (ПС) и гидродинамического следа (ГС)

Таким образом, поток разделен на две части: пограничный слой и внешний поток. Во внешнем потоке движение можно изучать, используя уравнения движения, не учитывающие влияние сил вязкого сопротивления (уравнения Эйлера), а внутри пограничного слоя – уравнения учитывающие эти силы (уравнения Навье-Стокса). Течение в пограничном слое может быть как ламинарным, так и турбулентным. Толщина пограничного слоя мала по сравнению с расстоянием от точки его образования. Строго говоря, приближение скорости пограничного слоя к скорости внешнего потока имеет асимптотический характер, однако уже на относительно малом расстоянии  $\delta$  от твердой стенки разница этих скоростей незначительна и ей можно пренебречь. Таким образом,  $\delta$  зависит от точности, с которой определяется равенство скоростей в пограничном слое и во внешнем потоке. Следовательно, однозначно определить толщину пограничного слоя невозможно. Для исключения этой неоднозначности в теории пограничного слоя вводятся другие геометрические параметры, которые косвенно характеризуют толщину  $\delta$ . К ним относятся *толщина вытеснения*  $\delta^*$  и *толщина потери импульса*  $\delta^{**}$ . Рассмотрим эти понятия более подробно.

Пусть имеется пластина, обтекаемая равномерным потоком вязкой жидкости, рис. 8.2. От начальной точки пластины 0 начинает формироваться пограничный слой, толщина которого  $\delta^*$ , равна нулю в начале пластины и увеличивается к ее концу по мере развития течения, см. рис. 8.2. Выше границы пограничного слоя на рис. 8.2 показана одна из линий тока внешнего течения. Составим уравнение баланса расходов в невозмущенном течении (сечение 1-1 на рис. 8.2) и в промежуточном сечении пограничного слоя 2-2:

$$q = u_0 \delta = u_0 \delta^* + \int_0^\delta u_x \, \mathrm{d} \, y, \qquad (8.1)$$

где *u*<sub>0</sub> – скорость набегающего невозмущенного потока.



Рис. 8.2. К определению толщины вытеснения

В уравнении (8.1) произведение  $u_0 \delta^*$  выражает расход жидкости через участок сечения  $\delta^*$ , где скорость в пограничном слое  $u_x$  практически равна  $u_0$ . Из геометрических соображений следует  $\delta = \int_{0}^{\delta} dy$ . Подставим это выражение в (8.1)

<sup>&</sup>lt;sup>\*</sup> Считаем что толщина δ определена при некоторой условно принятой погрешности соответствия скоростей в пограничном слое и во внешнем течении.

$$u_0 \int_0^{\delta} dy = u_0 \delta^* + \int_0^{\delta} u_x dy.$$
 (8.2)

Отсюда находим толщину вытеснения  $\delta^*$ 

$$\delta^* = \int_0^0 \left( 1 - \frac{u_x}{u_0} \right) dy.$$
 (8.3)

Из формулы (8.3) видно, что толщина вытеснения представляет собой величину смещения линий тока внешнего потока относительно линий тока идеальной жидкости из-за образования пограничного слоя. Нетрудно заметить, что толщина вытеснения практически не зависит от погрешности соответствия скоростей на границе пограничного слоя, которой соответствует б. В качестве верхнего предела интегрирования можно принять бесконечность, так как подынтегральная функция асимптотически убывает до нуля при увеличении *у*. В результате величина интеграла практически не изменится. Поэтому иногда употребляют запись

$$\delta^* = \int_0^{\infty, \circ} \left( 1 - \frac{u_x}{u_0} \right) \mathrm{d} y \,. \tag{8.4}$$

Если вместо асимптотического пограничного слоя принята модель слоя конечной толщины, то, как видно из (8.4), связь между  $\delta^*$  и  $\delta$  можно установить, если известно распределение продольной составляющей скорости в пограничном слое.

Толщина потери импульса δ\*\* определяется соотношением

$$\delta^{**} = \int_{0}^{\infty} \frac{u_x}{u_0} \left( 1 - \frac{u_x}{u_0} \right) dy$$
(8.5)

и характеризует потерю количества движения, необходимого для преодоления сил трения в пограничном слое.

Для определения гидродинамических параметров в пограничном слое используют два подхода. Первый из них основан на решении специальных уравнений, полученных из полных уравнений гидродинамики вязкой жидкости в предположении, что градиент скорости поперек пограничного слоя значительно превышает продольный градиент. Это позволяет значительно упростить исходные уравнения во многих практически важных случаях получить аналитические решения. В частотности давление поперек пограничного слоя можно считать постоянным и равным давлению в невозмущенном потоке.

Во втором подходе в дополнение к отмеченному выше допущению используют опытную или априорную информацию о распределении скорости поперек пограничного слоя. Это позволяет проинтегрировать уравнения по поперечной координате и свести исходную задачу решения системы дифференциальных уравнений в частных производных к решению системы обыкновенных дифференциальных уравных уравнений с одной независимой переменной – продольной координатой.

# 8.2. Переход ламинарного пограничного слоя в турбулентный. Структура турбулентного пограничного слоя

Течение в пограничном слое на стенке может быть ламинарным, переходным и турбулентным независимо от режима течения невозмущенного внешнего потока. Рассмотрим, например, пограничный слой на пластине, рис. 8.3.



Рис. 8.3. Структура пограничного слоя на пластине

Проведенные исследования показали, что режим течения в пограничном слое определяется числом Рейнольдса, определенным по характерному размеру пограничного слоя, например, его толщине  $\delta^*$ :

$$\operatorname{Re}_{\delta} = \frac{\rho u_0 \delta}{\mu} = \frac{u_0 \delta}{\nu}.$$
(8.6)

При  $\text{Re}_{\delta} > \text{Re}_{\delta \kappa p}$  происходит нарушение ламинарного режима течения и возникновение турбулентности. Поэтому вдоль достаточно длинной пластины режим течения в пограничном слое изменяется. На малых расстояниях от передней кромки пластины толщина пограничного слоя мала и пограничный слой сохраняет свое устойчивое ламинарное течение с молекулярным механизмом переноса. При увеличении толщины ламинарного пограничного слоя до критической величины  $\delta_{\kappa p}$  (на расстоянии  $x_{\kappa p}$  от передней кромки пластины) устойчивость течения в пограничном слое нарушается и появляется участок переходного течения, где хаотически по времени сменяется ламинарный и турбулентный режимы течения.

За переходным участком начинается турбулентный пограничный слой с турбулентным механизмом переноса. Характерным признаком перехода является резкое увеличение толщины пограничного слоя и напряжений трения на стенке, так как напряжения трения в этом случае определяются как молекулярной, так и турбулентной вязкостью. Длина переходного участка невелика и течение на этом участке мало исследовано. Поэтому в расчетах полагают, что ламинарный пограничный слой сразу переходит в турбулентный. При этом, несмотря на турбулентный характер течения в «основном» объеме пограничного слоя, непосредственно

<sup>&</sup>lt;sup>\*</sup> В качестве характерного размера пограничного слоя могут использоваться также и другие, связанные с  $\delta$  величины: продольная координата *x*, отсчитываемая от передней кромки пластины, толщина вытеснения  $\delta^*$ , толщина потери импульса  $\delta^{**}$ .

вблизи стенки существует тонкий слой практически с ламинарным характером течения – вязкий (ламинарный) подслой толщиной  $\delta_n$ , см. рис. 8.3. Распределение скоростей в вязком подслое – линейное. Распределение скоростей в турбулентной зоне пограничного слоя – логарифмическое (или степенное). Между вязким подслоем и внешней, турбулентной зоной развитого пограничного слоя не существует резкой границы и переход от линейного профиля скорости к логарифмическо-му происходит плавно, с образованием промежуточной области.

Критическое число Рейнольдса при обтекании пластины равно

$$\operatorname{Re}_{\delta_{un}} = (2, 8...30) \cdot 10^3, \tag{8.7}$$

то есть по порядку величины соответствует критическому числу Рейнольдса  $\operatorname{Re}_d$ , определяющему переход от ламинарного к турбулентному режиму течения в трубах. Если в качестве характерного размера пограничного слоя используется не толщина пограничного слоя  $\delta$ , а другие, связанные с ней величины, то соответствующие критические значения чисел Рейнольдса определяются соотношениями

$$\operatorname{Re}_{x_{\mathrm{kp}}} = (3, 2...30) \cdot 10^5, \quad \operatorname{Re}_{\delta^*_{\mathrm{kp}}} = (1...10) \cdot 10^3, \quad \operatorname{Re}_{\delta^{**}_{\mathrm{kp}}} = (4...40) \cdot 10^2.$$
 (8.8)

В общем случае положение точки перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный зависит от:

• степени турбулентности набегающего потока, характеризуемого величиной  $\sqrt{(u'_0)^2}/u_0$  (чем выше степень турбулентности внешнего течения, тем скорее ламинарный пограничный слой переходит в турбулентный);

• градиента давления вдоль обтекаемой поверхности dp/dx (положительный градиент ускоряет переход к турбулентному пограничному слою, отрицательный - затягивает);

состояния (шероховатости) обтекаемой твердой поверхности, которая влияет на переход вследствие внесения в поток дополнительных возмущений.

### 8.3. Отрыв пограничного слоя.

Уравнения пограничного слоя были получены при допущении о малости его относительной толщины  $\delta/x$ . Однако это допущение может нарушаться, если возникает отрыв пограничного слоя. Для выяснения сущности явления отрыва поясним, что давление поперек слоя практически постоянно и, следовательно, изменение давления вдоль пограничного слоя будет таким же, как и во внешнем потоке. Рассмотрим в качестве примера обтекание круглого цилиндра, рис. 8.4.

Начиная от передней критической точки<sup>\*</sup> скорость внешнего потока, обтекающего цилиндр возрастает, а давление на внешней границе пограничного слоя падает. Минимального значения давление достигает в точке *C*, там, где скорость потока становится максимальной  $u_{0max}$ . Продольный градиент давления в пограничном слое на этом участке отрицательный d p/dx < 0. Частицы среды, движущиеся на этом участке в пограничном слое испытывают ускорение, обусловлен-

<sup>\*</sup> Точка на поверхности обтекаемого тела, где набегающий поток полностью тормозится.

ное падением давления в направлении течения. Этому движению препятствует сила трения, обусловленная действием вязких напряжений. Все же, благодаря прямому перепаду давления, ускорение в потоке наблюдается, по крайней мере до точки *C*.



Рис. 8.4. Структура пограничного слоя в зоне отрыва

За точкой *C* перепад давления положительный dp/dx > 0, так как внешний поток тормозится и давление, в соответствии с интегралом Бернулли, возрастает. Частицам приходится двигаться против возрастающего давления. В идеальной жидкости это привело бы лишь к уменьшению кинетической энергии и восстановлению полного давления (до давления в передней критической точке). В действительности в пограничном слое часть энергии затрачивается на компенсацию работы сил трения, оказывающих тормозящее действие. В связи с этим, частицы среды в пограничном слое, имеющие малый запас кинетической энергии, начиная с некоторой точки *O* уже не могут преодолеть совокупное действие обратного градиента давления и сил трения, они в точке *O* останавливаются. При этом частицы, движущиеся на большем расстоянии от стенки, вытесняются в сторону внешнего потока. Часть жидкости, расположенная ниже точки *O* по потоку, под действием обратного градиента давления получает возвратное движение. Это явление и называется отрывом пограничного слоя.

На основании описанной картины течения нетрудно сформулировать условия отрыва:

$$\left. \frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}y} \right|_{y=0} = 0 \quad \text{или} \quad \tau = 0.$$
(8.9)

Из соотношений (8.9) можно получит координату точки отрыва. Заметим, что отрыв может произойти только за точкой минимума давления, а основным фактором, определяющим отрыв, является градиент давления.

Примеры визуализации картины течений с отрывом пограничного слоя показаны на рис. 8.5.

При турбулентном движении в пограничном слое наличие пульсаций скорости приводит к более интенсивному обмену энергией между пограничным слоем и внешним потоком, поэтому кинетическая энергия частиц среды в пограничном слое увеличивается. Последнее является причиной того, что отрыв турбулентного

пограничного слоя происходит значительно позже, чем ламинарного. Затягивание точки отрыва (при турбулентном пограничном слое) положительно влияет на снижение величины сопротивления плохо обтекаемых тел.



Рис. 8.5. Примеры отрыва пограничного слоя (визуализация с помощью воздушных пузырьков в воде): а – ламинарный отрыв на искривленной стенке Re = 20000; б – обтекание кругового цилиндра при Re = 2000

Отрыв пограничного слоя практически всегда сопровождает течения, которые развиваются вблизи уступов, изгибов, изломов твердых стенок. Только при весьма малых числах Рейнольдса, когда течение относится к классу ползущих, возможно практически безотрывное обтекания вязкой жидкостью таких препятствий.

# 8.4. Результаты решения уравнений пограничного слоя для отдельных частных случаев

Основной задачей решения уравнений пограничного слоя в задачах гидромеханики является определение напряжений (или коэффициентов) трения, а задачах теплопереноса – плотности тепловых потоков (или коэффициентов теплоотдачи) на обтекаемых поверхностях.

Рассмотрим некоторые наиболее известные результаты решения уравнений гидродинамического пограничного слоя.

Решение Г. Блазиуса для ламинарного пограничного слоя на пластине. Решение получено путем интегрирования уравнений пограничного слоя, формирующегося при обтекании пластины плоскопараллельным однородным потоком, и имеет вид

$$\tau = 0,332\rho \sqrt{\frac{\nu u_0^3}{x}},$$
(8.10)

где  $\tau$  – напряжение трения;  $u_0$  – скорость внешнего потока;  $\nu$  – коэффициент кинематической вязкости жидкости; x – продольная координата, отсчитываемая от начала пластины.

Обычно в практических расчетах используется относительная величина касательных напряжений – коэффициент трения  $C_f$ , для которого из (8.10) получается следующее выражение

$$C_f = \frac{\tau}{\rho \frac{u_0^2}{2}} = \frac{0.664}{\sqrt{\frac{u_0 x}{\nu}}} = \frac{0.664}{\sqrt{\text{Re}_x}},$$
(8.11)

где  $\operatorname{Re}_{x} = u_{0}x/\nu$  – число Рейнольдса, определенное по длине пластины.

Проинтегрировав (8.10) по двум поверхностям пластины (верхней и нижней) и поделив на  $\frac{1}{2}\rho u_0^2 S$  (где  $S = 2l \cdot 1$  - площадь поверхности пластины), получим коэффициент силы трения на пластине:

$$C_{f} = \frac{F_{\mu}}{\frac{1}{2}S\rho u_{0}^{2}} = \frac{1,328}{\sqrt{\frac{u_{0}l}{\nu}}} = \frac{1,328}{\sqrt{\text{Re}_{l}}}.$$
(8.12)

Эти результаты хорошо совпадают с опытными данными И. Никурадзе, которым разными методами получено:  $C_f = 1,315/\sqrt{\text{Re}_l} \text{ и } C_f = 1,319/\sqrt{\text{Re}_l}$ , что подтверждает верность основных положений теории пограничного слоя. Вместе с тем, следует отметить, при x = 0 решение (8.10) дает совершенно не соответствующий физическим представлениям. Формула (8.10) в этом случае дает результат  $\tau = \infty$ . Объясняется это тем, что вблизи переднего края пластины нарушается условие  $\partial u_x/\partial x \square \partial u_x/\partial y$ , положенное в основу вывода уравнений пограничного слоя.

**Решение уравнений турбулентного пограничного слоя на пластине.** Приводимое ниже решение получено методом интегральных соотношений в предположении, что профиль скорости поперек пограничного слоя степенной:

$$\frac{u_x}{u_0} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^n,\tag{8.13}$$

где  $u_x$  – продольная составляющая скорости в пограничном слое;  $u_0$  – скорость течения во внешнем потоке; y – поперечная координата;  $\delta$  – толщина пограничного слоя; n = 1/7.

Полученные в результате решения напряжение трения  $\tau$  и сила сопротивления  $F_{\mu}$  при обтекании пластины выражаются формулами:

$$\tau = 0,06\rho u_0^2 \operatorname{Re}_x^{-\frac{1}{5}}, \quad F_{\mu} = 2 \int_0^l \tau \, \mathrm{d} \, x = 0,072\rho u_0^2 \operatorname{Re}_x^{-\frac{1}{5}}.$$
(8.14)

С использованием этих величин коэффициенты местного и полного сопротивлений пластины найдутся из соотношений

$$C_{fx} = 0.0576 \operatorname{Re}_{x}^{-\frac{1}{5}}, \quad C_{fl} = 0.072 \operatorname{Re}_{l}^{-\frac{1}{5}}.$$
 (8.15)

Эти результаты достаточно хорошо соответствуют экспериментальным данным при  $5 \cdot 10^5 < \text{Re}_x < 10^7$ .

## 8.5. Сопротивление тел обтекаемых вязкой жидкостью

Тело, движущееся в жидкости, встречает со стороны последней сопротивление, для преодоления которого нужна дополнительная сила. В случае же когда тело неподвижно, а жидкость обтекает его, наоборот тело оказывает сопротивление течению жидкости. Рассмотрим силу, с которой набегающий поток действует на обтекаемое тело. Эта сила складывается из сил давления и сил трения. Результирующая этих сил является полной гидродинамической (газодинамической) силой P, которую принято представлять двумя составляющими силой лобового сопротивления  $P_x$  и подъемной силой  $P_y$ , рис. 8.6.



Рис. 8.6. Силы взаимодействия тела с потоком

За обтекаемым телом образуется гидродинамический след. Частицы жидкости, приторможенные в пограничным слое, попадают в след и постепенно смешиваются с основным потоком. Непосредственно за плохообтекаемым телом давление в следе может быть существенно ниже давления в невозмущенном потоке. Однако оно очень быстро выравнивается, в то время, как отличие в скорости может сохраняться на больших расстояниях за телом. Применим к контрольному объему *АВСD* уравнение сохранения количества движения, учитывая, что расход жидкости через поверхности *AB* и *CD* одинаков:

$$\rho_0 \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} \left( u_0 u - u_0^2 \right) \mathrm{d} \, y = \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} p_0 \, \mathrm{d} \, y - \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} p \, \mathrm{d} \, y - P_x.$$
(8.16)

Откуда найдем силу лобового сопротивления

$$P_{x} = \rho_{0} u_{0} \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} (u_{0} - u) dy + \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} (p_{0} - p) dy.$$
(8.17)

Из формулы (8.17) видно, что сила лобового сопротивления связана с падением скорости и давления в следе. Это в соответствии с уравнением Бернулли означает, что возникновение силы лобового сопротивления объясняется рассеянием механической энергии в потоке вследствие вязкости, то есть возрастанием энтропии.

Как уже отмечалось силу лобового сопротивления принято делить *на силу сопротивления давления* и *силу трения*. Такое деление условно, так как причиной возникновения, как одной, так и другой силы является вязкость жидкости, но удобно с методической точки зрения.

Для оценки силового взаимодействия между потоком и телом вводятся безразмерные *аэродинамические коэффициенты*: • коэффициент лобового сопротивления

$$C_x = \frac{F_x}{\rho_0 u_0^2 / 2}; \tag{8.18}$$

• коэффициент подъемной силы

$$C_{y} = \frac{F_{y}}{\rho_{0}u_{0}^{2}/2}; \qquad (8.19)$$

Коэффициенты  $C_x$  и  $C_y$  зависят от формы тела, его ориентации в потоке и режима обтекания, характеризуемого числами Рейнольдса и Маха. Обтекание тела сверхзвуковым потоком (M > 1) сопровождается образованием ударных волн и волн разрежения. В этом случае сила сопротивления давления называется *волновым сопротивлением*.

Все тела делят на *хорошо обтекаемые* и *плохо обтекаемые*. Тела, обтекаемые без отрыва пограничного слоя называют хорошо обтекаемыми, а с отрывом – плохо обтекаемыми. Обтекаемость тел зависит от тех же факторов, что и аэродинамические коэффициенты и может характеризоваться отношением силы сопротивления давления к силе сопротивления трения. Одно и то же тело при различной ориентации в потоке и при различных режимах течения может быть хорошо и плохо обтекаемым. Плохо обтекаемые тела всегда обтекаются с отрывом. Рассмотрим зависимость коэффициента  $C_x$  шара от числа Рейнольдса  $\text{Re}_0 = \rho_0 u_0 d/\mu$ , рис. 8.7.



Рис. 8.7. Схемы обтекания и коэффициенты сопротивления шара и цилиндра в зависимости от числа Рейнольдса: 1 – цилиндр; 2 – шар

Здесь можно отметить пять характерных областей, возникновение которых обусловлено изменением картины обтекания, см. рис. 8.7. В области I, при  $\text{Re}_0 < 100. C_x$  уменьшается. Здесь обтекание практически безотрывное. Картина

обтекания близка к картине обтекания шара идеальной жидкостью. Сила сопротивления почти исключительно определяется силой сопротивления трения. Резкое снижение  $C_x$  с увеличением числа Рейнольдса показывает, что в этой области сила сопротивления пропорциональна скорости  $u_0$ , что характерно для ламинарного режима течения.

При дальнейшем увеличении числа Рейнольдса до  $\text{Re}_0 < (2...3) \cdot 10^3$  (область II) в кормовой части возникает неустойчивое вихревое движение. Это понижает давление в кормовой части и приводит к увеличению сопротивления давления и замедлению падения  $C_x$ .

В области III, где  $(2...3) \cdot 10^3 < \text{Re}_0 < 2 \cdot 10^4$ , ламинарный пограничный слой отрывается от поверхности шара. В области срыва течения поток еще ламинарный и на некотором удалении в кормовой зоне турбулизируется. Коэффициент  $C_x$  слабо возрастает, что объясняется интенсификацией вихревого движения в кормовой области и увеличением сопротивления давления.

При  $2 \cdot 10^4 < \text{Re}_0 < 2 \cdot 10^5$  (область IV) коэффициент аэродинамического сопротивления сохраняет приблизительно постоянное значение  $C_x = 0,45...0,47$  так как положение точки отрыва *S* пограничного слоя не изменяется. Эта область называется областью *локальной автомодельности по числу Рейнольдса*. В этой области при увеличении Re<sub>0</sub> увеличивается зона турбулентности в области обратных токов за точкой отрыва и точка *T* перехода ламинарного течения в турбулентное в отрывной зоне приближается к точке отрыва *S* ламинарного пограничного слоя.

Затем в узкой зоне чисел Рейнольдса  $2 \cdot 10^5 < \text{Re}_0 < 4 \cdot 10^5$  коэффициент  $C_x$  кризисным образом уменьшается (область V). В этой области чисел Re<sub>0</sub> точка перехода *T* совпадает с точкой отрыва *S*. То есть пограничный слой турбулизируется перед отрывом. Турбулентный пограничный слой обладает большей сопротивляемостью отрыву. Поэтому точка отрыва, теперь уже турбулентного пограничного слоя, резко смещается вниз по потоку. Обтекание шара улучшается, сопротивление давления резко падает, что приводит к падению  $C_x$  в 3...5 раз.

Интересно отметить, что в области  $2.5 \cdot 10^3 < \text{Re}_0 < 2 \cdot 10^5$  можно снизить  $C_x$  с 0,47 до ~ 0,1 путем искусственной турбулизации основного потока, например, установив перед точкой отрыва *S* на поверхности шара тонкое кольцо.

В дальнейшем, при  $\text{Re}_0 > 4,5 \cdot 10^5$ , отмечается некоторое увеличение  $C_x$ , после чего коэффициент лобового сопротивления сохраняет практически постоянное значение (область VI). Это вторая область автомодельности по числу Рейнольдса, соответствующая фиксированному положению точки отрыва турбулентного пограничного слоя.

Аналогичная картина обтекания реализуется и на цилиндре.

#### 8.6. Движение газа в криволинейных каналах

При движении газов жидкости в криволинейных каналах возникают специфические явления. Для примера рассмотрим течение по каналу постоянного сечения, в котором поток совершает поворот на 90 °, рис. 8.8.



Рис.8.8. Схема потока в криволинейных каналах различной формы поперечного сечения

В связи с тем, что частицы движутся по криволинейным траекториям, давление на внешней (вогнутой) и внутренней (выпуклой) стенках канала различно и различным образом изменяется по ходу течения. Так как частицы ядра потока под действием центробежной силы оттесняются к внешней стенке, то давление вдоль линии A-B возрастает по сравнению с давлением  $p_1$  входящего потока, а вдоль линии  $A_1 - B_1$  – падает, см. рис. 8.8. За поворотом давление на внутренней стенке возрастает, а на внешней падает и на некотором удалении от поворота выравнивается с давлением основного потока. Таким образом, в сечениях криволинейного канала возникает поперечный градиент давления. Частицы газа, движущиеся в пограничном слое вдоль внешней поверхности на входе в криволинейную часть, находятся под действием положительного градиента давления. Они притормаживаются и оттесняются к ядру потока. По условию сплошности течения в ядре потока должно возникнуть встречное течение, направленное к внешней стенке. На внутренней стенке картина течения обратная. В результате в канале образуется вторичное вихревое течение, состоящее из двух потоков, см. рис. 8.8, б. Линии тока вторичного течения имеют симметрично-винтовой характер.

Вдоль участков стенки A-B и  $B_1-D_1$  течение диффузорное (с положительным градиентом давления), поэтому при определенных режимах течения здесь могут возникнуть отрывы (зоны I и II на рис. 8.8, *a*). Отрыв на стенке A-B может быть

локализован при дальнейшем конфузорном течении (с отрицательным градиентом давления) на участке B-D. Отрыв на участке  $B_1-D_1$  имеет более значительную протяженность по потоку.

Структура вторичного течения и вызываемая им дополнительная потеря энергии существенно зависит от формы канала и режима течения (чисел Re и M). На рис. 8.8, для сравнения, приведена картина течения на участке поворота прямоугольного канала. При  $l \square a$  вторичное течение по вогнутой и выпуклой стенкам затруднено, так как в этом случае велики потери на трение. Такое перетекание оказывается возможным только в пограничном слое вдоль плоских стенок. В рассматриваемом случае вторичное течение вырождается в пару вихрей, вращающихся в противоположных направлениях.

На вторичное течение затрачивается часть кинетической энергии потока. Потери энергии при течении на криволинейных участках можно разделить на:

- дополнительные потери на трение вследствие вторичного течения;
- вихревые потери в зоне отрыва;
- потери, вызванные компенсирующими вихревыми течениями.

Наибольшую долю потерь составляют вихревые потери вследствие отрыва.

# Оглавление

Введение	2
1. Основные физические свойства жидкостей и газов	2
1.1. Молекулярная структура и особенности жидкого и газообразного	
состояния среды	2
1.2. Плотность сплошной среды. Объемные свойства жидкостей и газов	7
1.3. Вязкость капельных жидкостей и газов	9
1.4. Скорость звука	. 11
1.5. Поверхностное натяжение жидкостей	. 11
1.6. Кипение жидкостей. Кавитация	. 12
2. Статика жидкости и газов	. 15
2.1. Общие условия равновесия. Основная теорема гидростатики	. 15
2.2. Основное уравнение гидростатики (уравнение Эйлера)	. 18
2.3. Равновесие несжимаемой жидкости в поле силы тяжести	. 19
2.4. Равновесие несжимаемой жидкости в сообщающихся сосудах.	
Измерение давления	. 21
2.5. Силы давления покоящейся жидкости на криволинейные поверхности	. 24
2.6. Силы давления покоящейся жидкости на плоские поверхности	. 26
2.7. Относительное равновесие несжимаемой жидкости	. 29
2.8. Закон Архимеда. Плавание тел	. 32
2.9. Остойчивость плавающих сил	. 33
2.10. Равновесие газа в поле силы тяжести	. 34
3. Основы кинематики и динамики жидкости и газа	. 36
3.1. Основные понятия и определения кинематики жидкости и газа	. 36
3.2. Уравнение неразрывности	. 38
3.3. Уравнение Бернулли для трубки тока	. 39
3.4. Уравнение сохранения количества движения	. 43
3.5. Условия перехода скорости газа через скорость звука	. 46
3.6. Основные термодинамические соотношения газовой динамики при	
адиабатическом течении идеального совершенного газа	. 48
3.7. Уравнение сохранения энергии	. 49
3.8. Параметры торможения. Газодинамические функции	. 55
4. Одномерные течения жидкости и газа	. 59
4.1. Одномерная модель реальных потоков	. 59
4.2. Уравнение Бернулли для одномерного потока вязкой несжимаемой	
жидкости	. 60
4.3. Потери давления на гидравлических сопротивлениях	. 63
4.3.1. Структура общих формул для расчета потерь давления	. 63
4.1. Основы теории подобия и анализа размерностей и их применение для	
определения сопротивления гидравлического трения	. 65
4.1.1. Основные положения теории подобия	. 66
4.1.2. Основные положения теории анализа размерностей	. 69

4.2. Потери на трение при ламинарном течении	2
4.3. Опытные данные о коэффициенте гидравлического трения	3
4.4. Начальный участок течения жидкости в трубах	5
4.5. Местные гидравлические сопротивления	)
4.6. Взаимное влияние местных сопротивлений	2
5. Истечение жидкости и газа через отверстия и насадки	3
5.1. Истечение жидкости при постоянном напоре	3
5.2. Истечение жидкости из резервуара при переменном напоре	5
5.3. Истечение газа из объема через отверстие	7
6. Расчет трубопроводных систем	)
6.1. Классификация трубопроводов	)
6.2. Расчет простого трубопровода	)
6.3. Расчет сложного трубопровода	l
6.4. Расчет трубопроводов при движении газов	5
6.5. Работа нагнетателя в сети 100	)
6.6. Прямой гидравлический удар в трубах 103	3
7. Скачки уплотнений при сверхзвуковом течении газов 106	5
7.1. Возникновение скачков уплотнений 106	5
7.2. Прямой скачок уплотнений 108	3
7.3. Косые скачки уплотнения 113	3
7.4. Скачки конденсации 115	5
8. Понятие пограничного слоя. Обтекание тел вязкой жидкостью 118	3
8.1. Основные физические представления о пограничном слое. Толщина	
пограничного слоя и толщина вытеснения 118	3
8.2. Переход ламинарного пограничного слоя в турбулентный. Структура	
турбулентного пограничного слоя121	Ĺ
8.3. Отрыв пограничного слоя 122	2
8.4. Результаты решения уравнений пограничного слоя для отдельных	
частных случаев124	1
8.5. Сопротивление тел обтекаемых вязкой жидкостью 125	5
8.6. Движение газа в криволинейных каналах 129	)