Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Южно-Уральский государственный университет
Филиал в г. Миассе
Кафедра «Прикладная информатика и математика»

517.5(07)
Т417

М.В. Тимощенко

РЯДЫ

Учебное пособие

Под редакцией В.И. Киселева

Челябинск
Издательский центр ЮУрГУ
2010

УДК 517.52(075.8)
Т417

Одобрено
учебно-методической комиссией филиала ЮУрГУ в г. Миассе

Рецензенты:
В.Ю. Савичев, Б.М. Тюлькин

Тимощенко, М.В.
Т417 Ряды: учебное пособие/ М.В. Тимощенко; под ред. В.И. Киселева. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2010. – 31 с.

Предлагаемое учебное пособие содержит раздел рабочей программы «Ряды» для студентов экономических факультетов, а также оно может быть полезным для всех категорий студентов, изучающих данный раздел.

В нём излагается теоретический материал по данной главе, который сопровождается рассмотрением большого количества типовых примеров.

Наличие в учебном пособии списка экзаменационных вопросов поможет студенту в подготовке к сдаче зачёта и экзамена.

УДК 517.52(075.8)

§1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ. СХОДИМОСТЬ РЯДА

Числовым рядом называется бесконечная последовательность чисел U_1, U_2, …U_n, …соединенная знаком сложения

$$U_1 + U_2 + \ldots + U_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} U_n$$

Ряд считается *заданным*, если известен его общий член.
Общим членом называется n-й член ряда.

<u>Пример</u>: $\frac{1}{1^2 \cdot 2} - \frac{1}{2^2 \cdot 3} + \frac{1}{3^2 \cdot 4} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n^2(n+1)} + \ldots;$ $\quad U_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2(n+1)}$

Числовой ряд называется *сходящимся*, если существует конечный предел последовательности его частичных сумм:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

где S – сумма ряда; S_n – частичная сумма.

Если же такой предел не существует или $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, то ряд называется *расходящимся* [1].

<u>Пример:</u> $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots$

Определить, сходящийся или расходящийся ряд.

<u>Решение</u>:

$$U_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

$$U_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} = \frac{A(n+1) + Bn}{n(n+1)}$$

$$\begin{array}{l|l} n^1 & 0 = A + B \Rightarrow B = -1 \\ n^0 & 1 = A \end{array}$$

$$U_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

Ответ: ряд сходится.

<u>Пример</u>: $b + bq + bq^2 + \ldots + bq^{n-1} + \ldots$

Определить, в каких случаях ряд сходится, в каких – расходится. Используем формулу для вычисления суммы n первых членов геометрической прогрессии

$$S_n = \frac{b(1-q^n)}{1-q} = \frac{b-bq^n}{1-q} = \frac{b}{1-q} - \frac{bq^n}{1-q}$$

1) $|q| < 1$

$q^n \to 0$ при $n \to \infty$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b}{1-q} - \frac{bq^n}{1-q}\right) = \frac{b}{1-q}$$

Ответ: ряд сходится.

2) $|q| > 1$

$q^n \to \infty$ при $n \to \infty$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b}{1-q} - \frac{bq^n}{1-q}\right) = -\infty$$

Ответ: ряд расходится.

3) $|q| = 1$

при q=1 ряд имеет вид

$b + b + ... + b + ...$

$S_n=nb$

$S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} nb = \infty$

при q = –1 ряд имеет вид

$b-b+b-b+\ldots$

S_n=0 при чётном n

S_n=b при нечётном n

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует, ряд расходится

Ответ: ряд расходится.

Свойства сходящихся рядов

1. Если ряд $U_1 + U_2 +\ldots+ U_n +\ldots$ сходится и его сумма равна S, то ряд $CU_1 + CU_2 +\ldots+ CU_n +\ldots$, где C = const, также сходится и его сумма равна CS.

2. Если ряды $U_1 + U_2 +\ldots+ U_n +\ldots$ и $V_1 + V_2 +\ldots+ V_n +\ldots$ сходятся и их суммы соответственно равны S_U и S_V, тогда ряды
   $(U_1 + V_1) + (U_2+ V_2)+\ldots+ (U_n+ V_n) +\ldots$
   $(U_1 - V_1) + (U_2 - V_2)+\ldots+ (U_n- V_n) +\ldots$ тоже сходятся и их суммы соответственно равны $S_U + S_V$ и $S_U - S_V$.

3. Если ряд сходится, то сходится и ряд, полученный из данного путем отбрасывания или приписывания конечного числа членов.

Ряд, полученный из данного отбрасыванием его первых n членов, называется *n-м остатком ряда.*

Утверждение: для того чтобы ряд сходился, необходимо и достаточно, чтобы при $n \to \infty$ n-й остаток ряда стремился к нулю.

Обозначение: $U_1 + U_2 + \ldots + U_n + U_{n+1} + U_{n+2} + \ldots$, где

$U_1 + U_2 + \ldots + U_n = S_n$ – частичная сумма ряда

$U_{n+1} + U_{n+2} + \ldots = r_n$ – n-й остаток ряда

$$\lim_{n\to\infty} r_n = 0$$

§2. НЕОБХОДИМЫЙ ПРИЗНАК СХОДИМОСТИ РЯДА

Теорема: Если ряд сходится, то предел его общего члена равен нулю при $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} U_n = 0$$

Доказательство: составим сумму первых n членов ряда.

$$S_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_n = S_{n-1} + U_n$$

Пусть ряд сходится по определению

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S \text{ (по св-ву 3)}$$

$$U_n = S_n - S_{n-1}$$

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0,$$

т.е. $\lim_{n\to\infty} U_n = 0$, что и требовалось доказать.

Пример: рассмотрим пример из **§1**.

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots$$

$$U_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

проверим условие теоремы: т.к. ряд сходится, то n-й член должен стремиться к нулю при $n \to \infty$.

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \left(\frac{1}{\infty}\right) = 0$$

Следствие: если n-й член ряда не стремится к нулю при $n \to \infty$, то ряд расходится.

Пример: $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{3}{7}+\ldots$

$$U_n = \frac{n}{2n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1} = \text{применим правило Лопиталя} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0$$

Ответ: ряд расходится.

Гармонический ряд

Гармонический ряд – это ряд вида [3]:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

$$U_n = \frac{1}{n}$$

Этот ряд расходится, хотя $U_n \to 0$.

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

Доказательство:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}+\frac{1}{17}+\ldots \quad (1)$$

Напишем вспомогательный ряд.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots \quad (2)$$

Обозначение: S_n^1 – сумма первых n-членов ряда (1)

S_n^2 – сумма первых n-членов ряда (2)

Каждый член ряда (1) больше, либо равен соответствующему члену ряда (2), следовательно, $S_n^1 > S_n^2$

Посчитаем частичные суммы ряда (2) для значений
$n = 2^1, 2^2, 2^3, \ldots, 2^k$

$$n = 2^1 = 2; \quad S_{2^1} = S_2 = 1+\frac{1}{2}$$

$n = 2^2 = 4; \quad S_{2^2} = S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2}$

$n = 2^3 = 8; \quad S_{2^3} = S_8 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 1 + 3 \cdot \frac{1}{2}$

$n = 2^k; \quad S_{2^k} = 1 + k \cdot \frac{1}{2}$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n^2 = \lim\limits_{k\to\infty} S_{2^k} = \lim\limits_{k\to\infty}\left(1 + k \cdot \frac{1}{2}\right) = \infty$

Ряд (2) расходится, но т.к. $S_n^1 > S_n^2$, то ряд (1) – расходящийся, что и требовалось доказать.

§3. ДОСТАТОЧНЫЕ ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ РЯДОВ

п.1. Признак сравнения.

Пусть даны два ряда с положительными членами

$$U_1 + U_2 + ... + U_n + \dots (U_i > 0) \qquad (1)$$

$$V_1 + V_2 + ... + V_n + \dots (V_i > 0) \qquad (2)$$

Теорема 1: Если члены ряда (1) не больше соответствующих членов ряда (2) и ряд (2) сходится, то сходится и ряд (1).

$$U_n \quad \le \quad V_n$$

$$\text{сход.} \Leftarrow \text{сход.}$$

Теорема 2: Если члены ряда (1) не меньше соответствующих членов ряда (2) и ряд (2) расходится, то расходится и ряд (1).

$$U_n \quad \ge \quad V_n$$

$$\text{расх.} \Leftarrow \text{расх.}$$

Доказательство 1: Обозначим через S_n сумму первых n членов ряда (1).

$S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} U_i$; $\qquad G_n = \sum\limits_{i=1}^{n} V_i$ – сумма первых n членов ряда (2)

т.к. по условию $U_n \le V_n$, то $S_n \le G_n$,

т.к. ряд (2) сходится, то существует предел его частичных сумм.

$$\lim_{n\to\infty} G_n = G$$

Из того, что члены ряда (1) и (2) положительны, следует, что $G_n < G \Rightarrow S_n \le G_n < G$

Частичная сумма S_n ограничена; при увеличении n частичная сумма S_n возрастает, а т.к. сумма возрастает и ограничена, то она имеет предел:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

следовательно, ряд (1) сходится.

<u>Доказательство 2:</u> Обозначения те же.

По условию $S_n \geq G_n$,

т.к. члены ряда (2) положительны, то частичная сумма G_n возрастает при возрастании n и по условию ряд (2) расходится, $\lim_{n\to\infty} G_n = \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \infty$,

следовательно, ряд (1) расходится.

<u>Пример:</u> $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$

$U_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$; Для сравнения возьмём ряд с n-м членом

$V_n = \frac{1}{n}$ – гармонический ряд (расходящийся)

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$$

$$расх. \Leftarrow расх.$$

Ответ: ряд расходится.

<u>Пример:</u> $\frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 6} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{5\cdot 8} + \ldots$

$$U_n = \frac{1}{(n+1)(n+4)}$$

$$\frac{1}{(n+1)(n+4)} = \frac{1}{n^2+5n+4} < \frac{1}{n^2+5n} < \frac{1}{n^2}$$

$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$ – ряд обратных квадратов (сходящийся).

Ответ: ряд сходится.

п.2. <u>Предельный признак сравнения</u>.

Если существует конечный и отличный от 0 предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_n}{V_n} = \text{const} \neq 0,$$

то оба ряда одновременно сходятся или расходятся.

<u>Пример</u>: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+5}{n^3} = \frac{7}{1} + \frac{13}{8} + \frac{23}{27} + \ldots$

Для сравнения возьмём сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_n}{V_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+5}{n^3}:\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(2n^2+5\right)}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+5}{n}=$$

$$=|\text{применим правило Лопиталя}| = \lim_{n\to\infty}\frac{4n}{1}=\infty$$

Теперь для сравнения возьмём расходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_n}{V_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+5}{n^3}:\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+5}{n^2}= |\text{применим правило Лопиталя}| =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{2n}=2\neq 0$$

Ответ: ряд расходится.

п.3. Признак Даламбера (1717 – 1783, французский математик).

Пусть дан ряд с положительными членами. Если при $n \to \infty$ существует предел отношения последующего члена к предыдущему, равный q

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=q,$$

то при $q<1$ – ряд сходится,

$q>1$ – ряд расходится,

$q=1$ – неизвестно, в этом случае требуется исследовать ряд с помощью других методов.

Пример: $1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\ldots$

$$U_n=\frac{1}{n!};\qquad U_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(n+1)!}:\frac{1}{n!}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)}=\frac{1}{\infty}=0<1$$

Ответ: ряд сходится.

Пример: Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots+\frac{n}{2^n}+\ldots$$

Решение: Здесь

$$U_n=\frac{n}{2^n},\ U_{n+1}=\frac{n+1}{2^{n+1}},$$

поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2^{n+1}}:\frac{n}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}<1,$$

Ответ: следовательно, ряд сходится.

п.4. Признак Коши.

Пусть дан ряд положительных членов. Если при $n\to\infty$ существует предел величины $\sqrt[n]{U_n}$, равный q

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{U_n}=q,$$

то при q<1 – ряд сходится,

q>1 – ряд расходится,

q=1 – неизвестно, в этом случае требуется исследовать ряд с помощью других методов.

Пример: $\left(\frac{1}{3}\right)^1+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^3+\ldots$

$$U_n=\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{U_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}<1$$

Ответ: ряд сходится.

Пример: Пользуясь признаком Коши, исследовать на сходимость ряд [2]

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}$$

Решение: Для данного ряда

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}=0<1$$

Ответ: следовательно, ряд сходится.

п.5. Интегральный признак сходимости.

Пусть дан ряд, членами которого являются значения непрерывных функций при целых значениях аргумента x

$U_1=f(1);\ U_2=f(2);\ U_3=f(3);\ \ldots;\ U_n=f(n),\ldots$

$f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(n)+\ldots,$

Пусть данная функция монотонно убывает на интервале [1;+∞); если несобственный интеграл $\int_1^{+\infty}f(x)\,dx$ сходится, то сходится и ряд, а если он расходится, то расходится также и ряд.

Пример: Исследовать на сходимость ряд [5]

$$\sum_{n=2}^{\infty} - \frac{1}{n\ln^2(n+1)}$$

Решение:

Рассмотрим вспомогательный ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} - \frac{1}{n\ln^2 n}$$

Так как $U_n = \dfrac{1}{n\ln^2 n}$, то $f(x) = \dfrac{1}{x\ln^2 x}$

Проверим применимость интегрального признака. Очевидно, что функция $f(x)$ непрерывна и принимает только положительные значения на промежутке (2;+∞). Убедимся, что $f(x)$ монотонно убывает на этом промежутке.

Пусть 2< x_1<x_2. Тогда $\ln^2 x_1 < \ln^2 x_2$ и $x_1\ln^2 x_1 < x_2\ln^2 x_2$, откуда

$$f(x_1) = \frac{1}{x_1\ln^2 x_1} > \frac{1}{x_2\ln^2 x_2} = f(x_2).$$

Итак, функция $f(x)$ положительна, непрерывна и монотонно убывает на промежутке (2;+∞), значит, для исследования данного ряда на сходимость можно применить интегральный признак сходимости.

Найдём неопределённый интеграл $\int f(x)dx$:

$$\int\frac{dx}{x\ln^2 x} = \left|\begin{matrix}\ln x = t \\ \frac{1}{x}dx = dt\end{matrix}\right| = \int\frac{dt}{t^2} = \int t^{-2}dt = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{\ln x} + C.$$

Вычислим несобственный интеграл

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x} = \lim_{b\to+\infty}\int_2^{b}\frac{dx}{x\ln^2 x} = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{\ln x}\Big|_2^b\right) = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{\ln b} + \frac{1}{\ln 2}\right) = -0 + \frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}.$$

Так как несобственный интеграл $\int_2^{+\infty}\dfrac{dx}{x\ln^2 x}$, сходится, то сходится и ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}.$$

Используем признак сравнения

$$U_n = \frac{1}{n\ln^2(n+1)} < \frac{1}{n\ln^2 n} = V_n,$$

Следовательно, исходный ряд сходится.

Ответ: ряд сходится.

<u>Пример:</u> ряд Дирихле [3]: $\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+...+\frac{1}{n^p}+...$

Проверим сходимость этого ряда

$$f(x)=\frac{1}{x^p}$$

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx=\left|если\ \ p\neq 1\right|=\lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{dx}{x^p}=\lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-p}dx\lim_{b\to\infty}\left(\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right)\Bigg|_1^b=\frac{1}{1-p}\lim_{b\to\infty}\left(b^{-p+1}-1^{-p+1}\right)=$$

а) $p>1\Rightarrow b^{-p+1}=\frac{1}{b^{p-1}}\Rightarrow\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{b^{p-1}}-1\right)=-1$

$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}=\frac{-1}{1-p}=\frac{1}{p-1}$ – сходящийся, следовательно, ряд сходится.

б) $p<1\Rightarrow -p+1>0\Rightarrow\lim_{b\to+\infty}\left(b^{-p+1}-1\right)=+\infty$

$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}=\infty$ – расходящийся, следовательно, ряд расходится.

в) $p=1$

$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{dx}{x}=\lim_{b\to\infty}\ln|x|\Big|_1^b=\lim_{b\to\infty}\left(\ln|b|-\ln 1\right)=\infty$ – расходящийся,

следовательно, ряд расходится.

Ответ: ряд сходится при $p>1$;
ряд расходится при $p\leq 1$.

§4. ЗНАКОЧЕРЕДУЮЩИЕСЯ РЯДЫ

Ряд, в котором члены имеют чередующиеся знаки, т.е. $U_1-U_2+U_3-U_4+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot U_n$ (где $U_n > 0$), называется *знакочередующимся рядом*.

<u>Теорема Лейбница:</u> если в знакочередующемся ряде члены таковы, что каждый последующий член меньше предыдущего (по абсолютной величине) и предел n-го члена равен нулю, при $n\to\infty$, то ряд сходится, его сумма положительна и не превосходит первого члена [6].

<u>Доказательство:</u>

1. Рассмотрим сумму n первых членов ряда для $n=2m$.

   $$S_n = S_{2m} = (U_1 - U_2) + (U_3 - U_4) + \ldots + (U_{2m-1} - U_{2m})$$

   Из условия, что каждый последующий член меньше предыдущего, утверждаем, что выражение в каждой скобке положительно.

   $$\left.\begin{array}{l} U_1 - U_2 > 0 \\ U_3 - U_4 > 0 \\ \quad\ldots \\ U_{2m-1} - U_{2m} > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow S_{2m} > 0$$

   И с возрастанием m сумма возрастает.

   Запишем ту же сумму в виде:

   $$S_{2m} = U_1 - (U_2 - U_3) - (U_4 - U_5) - \ldots - (U_{2m-2} - U_{2m-1}) - U_{2m}$$

   т.к. выражение в каждой скобке положительно в результате вычитания этих скобок из U_1 мы получим, что $S_{2m} < U_1$, т.е. ограничена.

   Т.к. S_{2m} – положительна, возрастает, ограничена, следовательно, имеет предел.

   $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m} = S$, следовательно, ряд сходится.

2. Рассмотрим сумму n первых членов ряда для $n=2m+1$

   $$S_n = S_{2m+1} = S_{2m} + U_{2m+1}$$

   По условию теоремы, n-й член ряда стремится к нулю при $n\to\infty$, т.е. $\lim\limits_{m\to\infty} U_{2m+1} = 0$

   $$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{m\to\infty} \left[S_{2m} + U_{2m+1}\right] = \lim_{m\to\infty} S_{2m} + \lim_{m\to\infty} U_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} S_{2m} = S$$

   т.е. ряд сходится.

Пример: $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...$

Определить сходимость ряда.

Решение:

$$\left.\begin{array}{ll} 1)\ 1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}>... & \textit{выполняется} \\ 2)\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0 & \textit{выполняется} \end{array}\right\}\Rightarrow$$ по теореме Лейбница, ряд сходится.

Ответ: ряд сходится.

§5. ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЕ РЯДЫ

Числовой ряд называется *знакопеременным*, если среди его членов имеются как положительные, так и отрицательные.

Теорема. «Достаточный признак сходимости знакопеременного ряда»

Если ряд, составленный из абсолютных величин членов знакопеременного ряда, сходится, то сходится и сам знакопеременный ряд.

Доказательство: $U_1+U_2-U_3+U_4-U_5-U_6-U_7+...\pm U_n+...$ (1)

$|U_1|+|U_2|+|U_3|+...+|U_n|+...$ (2)

$S_n -$ сумма первых n членов ряда (1);

$G_n -$ сумма первых n членов ряда (2);

$S'_n -$ сумма всех положительных членов;

$S''_n -$ сумма абсолютных величин всех отрицательных членов.

$S_n = S'_n - S''_n$

$G_n = S'_n + S''_n$

По условию, ряд (2) сходится, т.е. G_n имеет предел $\lim\limits_{n\to\infty} G_n = G$

т.к. S'_n и S''_n – положительные возрастающие величины и $S'_n < G_n < G$;

$S''_n < G_n < G$;

получаем, что они ограничены, следовательно, они имеют пределы

$\lim\limits_{n\to\infty} S'_n = S'$; $\lim\limits_{n\to\infty} S''_n = S''$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(S'_n - S''_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} S'_n - \lim\limits_{n\to\infty} S''_n = S' - S''$, следовательно, ряд (1) сходится.

Знакопеременный ряд называется *абсолютно сходящимся,* если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов.

Знакопеременный ряд называется *условно сходящимся,* если сам ряд сходится, а ряд, составленный из абсолютных величин его членов, расходится.

Пример: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$

По теореме Лейбница, ряд сходится (см. пример в § 4)

$|1| + \left|\frac{1}{2}\right| + \left|\frac{1}{3}\right| + \left|\frac{1}{4}\right| + \ldots$ ряд гармонический, расходящийся.

Ответ: ряд условно сходящийся.

Пример: $\frac{\sin\alpha}{1^2} + \frac{\sin 2\alpha}{2^2} + \frac{\sin 3\alpha}{3^2} + \ldots + \frac{\sin n\alpha}{n^2} + \ldots$

α – любое число.

$$\left|\frac{\sin\alpha}{1^2}\right| + \left|\frac{\sin 2\alpha}{2^2}\right| + \ldots + \left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right| + \ldots$$

$U_n = \left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$ (по первому признаку сравнения)

$\text{сход.} \Leftarrow \text{сход.}$

Ответ: ряд абсолютно сходится.

Свойства:

1. Если знакопеременный ряд сходится абсолютно, то он остается абсолютно сходящимся при любой перестановке его членов, при этом сумма ряда не зависит от порядка его членов.

2. Если знакопеременный ряд сходится условно, то какое бы ни задали число А, можно так переставить члены этого ряда, чтобы его сумма оказалась в точности равной А.

Более того, можно так переставить члены условно сходящегося ряда, чтобы ряд, получившийся после перестановки, оказался расходящимся.

§6. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

Функциональным рядом называется ряд $U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n + \ldots$, члены которого являются функциями от x.

$$U_1(x) + U_2(x) + U_3(x) + \ldots + U_n(x) + \ldots$$

Совокупность всех значений x, для которых функциональный ряд сходится, называется *областью сходимости* этого ряда.

Обозначения: $S(x)$ – сумма ряда

$S_n(x)$ – сумма первых n членов ряда

$r_n(x)$ – остаток ряда

$$r_n(x) = U_{n-1}(x) + U_{n+2}(x) + \ldots$$

Утверждение: если ряд сходится при некоторых значениях x, то

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x) \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0$$

Пример: Найти область сходимости функционального ряда [7]

$$e^{-x} + e^{-2x} + \ldots + e^{-nx} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} .$$

Решение: Применяя признак Коши. Будем иметь

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{e^{-nx}} = e^{-x} \begin{cases} <1 \ \ при \ \ x>0 \\ >1 \ \ при \ \ x<0, \end{cases}$$

в силу чего ряд сходится при положительных x и расходится при отрицательных. В точке x=0 данный ряд обращается в числовой ряд

1+1+1+…+1…,

очевидно, расходящийся.

Таким образом, областью сходимости данного ряда является интервал 0<x<+∞.

Ответ: (0;+∞)

Пример: Найти область сходимости функционального ряда [6]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{|x|}{x}\right)^n .$$

Решение: Члены функционального ряда определены на всей оси за исключением точки x=0, которая поэтому заведомо не принадлежит области сходимости рассматриваемого ряда.

Если x<0, $\frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$, а потому при отрицательных x

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{|x|}{x}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}.$$

Знакочередующийся ряд в правой части последнего равенства сходится по теореме Лейбница.

Если x>0, $\frac{|x|}{x}=\frac{x}{x}=1$, а потому при отрицательных x

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\frac{|x|}{x})^{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Ряд в правой части гармонический, т.е. расходящийся. Поэтому областью сходимости рассматриваемого ряда является интервал (–∞; 0).

Ответ: (–∞;0)

Функциональный ряд называется *правильно сходящимся* в области D, принадлежащей области сходимости ряда, если в области D все члены ряда по абсолютной величине не превосходят соответствующих членов некоторого сходящегося числового ряда с положительными членами, т.е. во всех точках области D должно выполняться неравенство

$$|U_n|<M_n$$

└член сходящегося числового ряда

$$M_1+M_2+...+M_n+...$$

Мажорирующий (усиливающий) ряд по отношению к функциональному.

<u>Пример:</u> $\frac{\sin x}{1^2}+\frac{\sin 2x}{2^2}+\frac{\sin 3x}{3^2}+...$

$U_n=\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right|<\frac{1}{n^2}$, следовательно, ряд сходится.

Ответ: ряд правильно сходящийся.

Свойства правильно сходящихся рядов

1. Если ряд из непрерывных функций правильно сходится в области D, то его сумма есть функция, непрерывная в этой области.

2. Если функциональный ряд с непрерывными членами правильно сходится на отрезке [$a;b$], то его можно почленно интегрировать на этом отрезке, т.е.

$$\int_a^b\left\{\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right\}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)dx\ .$$

3. Если функциональный ряд, с непрерывно дифференцируемыми членами сходится на данном интервале, а ряд, составленный из производных его членов,

правильно сходится на этом интервале, то данный ряд можно почленно дифференцировать в точках этого интервала, т.е.

$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right\}^{|} = \sum_{n=1}^{\infty} u_{n_n}^{|}(x).$$

§7. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ. ИНТЕРВАЛ И РАДИУС СХОДИМОСТИ СТЕПЕННОГО РЯДА

Степенным рядом называется следующий функциональный ряд:

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots \qquad (1),$$

члены которого являются произведением постоянных $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ на степенные функции с целыми показателями.

Будем рассматривать частный случай этого ряда при $x_0 = 0$:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (2)$$

Сходимость этого ряда определяется по теореме Абеля.

<u>Теорема Абеля</u>

1. Если степенной ряд (2) сходится при некотором значении $x_0 \neq 0$, то он абсолютно сходится при всяком $|x| < |x_0|$.

2. Если ряд (2) расходится при некотором значении $x_0^{'}$, то он расходится при всяком $|x| > |x_0^{'}|$.

<u>Доказательство:</u>

1) т.к. по предположению числовой ряд $a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + a_3 x_0^3 + \ldots + a_n x_0^n + \ldots$ сходится, то его n-й член $U_n = a_n x_0{}^n \to 0$ при $n \to \infty$.

Значит, существует такое положительное число М, что все члены ряда по абсолютной величине меньше этого числа М.

Перепишем ряд (2) в другом виде:

$$a_0 + a_1 x_0 \left(\frac{x}{x_0}\right) + a_2 x_0{}^2 \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \ldots + a_n x_0{}^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n + \ldots \qquad (3)$$

Рассмотрим ряд из абсолютных величин:

$$|a_0| + |a_1 x_0| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right| + |a_2 x_0{}^2| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \ldots + |a_n x_0{}^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \ldots \qquad (4)$$

Вспомогательный ряд:

$$M + M\left|\frac{x}{x_0}\right| + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \ldots + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \ldots \qquad (5)$$

При $|x| < |x_0|$ ряд (5) – геометрическая прогрессия со знаменателем $q = \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$, следовательно, ряд (5) сходится.

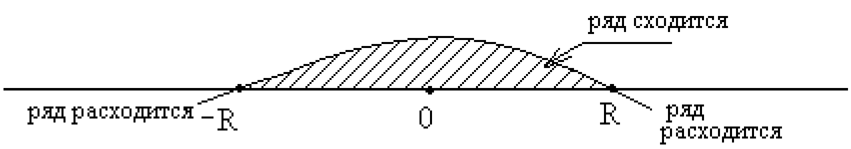
Члены ряда (4) меньше соответствующих членов ряда (5); ряд (5) сходится, следовательно, ряд (4) тоже сходится.

Ряд (4) – это ряд (3) из абсолютных величин, и раз он сходится, следовательно, ряд (3) сходится абсолютно, а ряд (3) – это то же самое, что и ряд (2), значит, ряд (2) сходится абсолютно.

2) ряд (2) расходится по условию. Докажем методом от противного. Представим, что в какой-либо точке *x*, удовлетворяющей нашему условию, ряд сходится, тогда он должен сходиться по только что доказанной части теоремы и в точке x_0', т.к. $|x_0'| < |x|$.

Но это противоречит условию, т.к. в точке x_0' ряд расходится.

Интервалом сходимости степенного ряда называется такой интервал от –R до R, что для всякой точки x, лежащей внутри этого интервала, ряд сходится, и при том абсолютно, а для точек *x*, лежащих вне его, ряд расходится. При этом число R называют *радиусом сходимости степенного ряда*.



Способы определения радиуса сходимости

I. Пусть имеем ряд: $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots$

Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин его членов:

$$|a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + |a_3 x^3| + \ldots + |a_n x^n| + \ldots$$

Воспользуемся признаком Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}\cdot x^{n+1}}{a_n\cdot x^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\cdot|x|=q|x|,\text{ где } q=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

По признаку Даламбера, ряд сходится, если

$$q|x|<1$$

$$|x|<\frac{1}{q}=R\qquad\Rightarrow\qquad R=\frac{1}{q}=\frac{1}{\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

II. Аналогично, по признаку Коши [2],

$$R=\frac{1}{q}=\frac{1}{\lim\sqrt[n]{|a_n|}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

<u>Пример:</u> $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{n+1}:\frac{x^n}{n}\right|=\lim_{n\to\infty}|x|\cdot\left|\frac{n}{n+1}\right|=|x|\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right|=|x|<1;$$

$$-1<x<1$$

Пусть $x=1$

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ – ряд гармонический, расходящийся.

Пусть $x=-1$ $\qquad -1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n}+\ldots$

По теореме Лейбница:

1) $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\ldots$ выполняется

2) $\lim\limits_{n\to\infty}U_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\frac{1}{\infty}=0$ выполняется, следовательно, ряд сходится.

$|1|+\left|\frac{1}{2}\right|+\left|\frac{1}{3}\right|+\ldots+\left|\frac{1}{n}\right|+\ldots$ расходится, следовательно, ряд сходится условно.

Ответ: $-1\le x<1$

└сходится условно.

<u>Пример:</u> Определить радиус сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}x^{2n}.$$

<u>Решение:</u> Для данного ряда [8]

$$u_n(x)=\frac{2^n n!}{n^n}x^{2n};\; u_{n+1}(x)=\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}x^{2n+2}.$$

В силу признака Даламбера ряд будет сходиться абсолютно для тех значений x, для которых

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}=\frac{2^{n+1}(n+1)!|x|^{2n+2}}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{2^n n!|x|^{2n}}=2|x|^2\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}=2|x|^2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{2|x|^2}{e}<1,$$

т.е. $|x|^2<\frac{e}{2}$, или $|x|<\sqrt{\frac{e}{2}}$.

Следовательно, $R=\sqrt{\frac{e}{2}}$.

Ответ: $\sqrt{\frac{e}{2}}$.

Пример: Определить радиус и интервал сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{2^n(n+1)(n+2)}.$$

Решение: Для данного ряда

$$|u_n(x)|=\frac{|x+1|^n}{2^n(n+1)(n+2)},\quad |u_{n+1}(x)|=\frac{|x+1|^{n+1}}{2^{n+1}(n+2)(n+3)};$$

$$\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\frac{n+1}{n+3}\cdot\frac{|x+1|}{2}\to\frac{|x+1|}{2}\quad при\ n\to\infty$$

В силу признака Даламбера ряд будет сходиться абсолютно при значениях x, удовлетворяющих неравенству

$$\frac{|x+1|}{2}<1,\quad \text{или}\quad |x+1|<2,$$

которое равносильно системе неравенств

$$-2<x+1<2,\ \text{или}\ -3<x<1$$

Таким образом, интервал сходимости ряда (–3; 1), а радиус сходимости R=2.
Ответ: (–3;1), R=2.

§8. СВОЙСТВА СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

Лемма 1. Степенной ряд правильно сходится в любом интервале [–b; b], целиком лежащем внутри интервала сходимости.

Лемма 2. Степенной ряд, составленный из производных членов ряда имеет тот же радиус сходимости, что и данный ряд.

Свойства

1. Сумма $S(x)$ степенного ряда есть функция непрерывная в интервале сходимости ряда.
2. Степенной ряд можно почленно интегрировать на каждом отрезке расположенном внутри интервала сходимости.
3. Степенные ряды $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, имеющие радиусы сходимости соответственно R_1 и R_2, можно почленно складывать, вычитать и умножать. Радиус сходимости произведения, суммы и разности рядов не меньше, чем меньшее из чисел R_1 и R_2.
4. Степенной ряд внутри интервала сходимости можно почленно дифференцировать; при этом для ряда $S(x)= a+ a_1x+ a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$ при $-R<x<R$ выполняется равенство $S'(x)= a_1+2a_2x+\ldots+n a_nx^{n-1}+\ldots$

§9. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА. РЯД ТЕЙЛОРА. РЯД МАКЛОРЕНА

Для приложений важно уметь данную функцию $f(x)$ разлагать в степенной ряд, т.е. функцию $f(x)$ представлять в виде суммы степенного ряда.

Для любой функции $f(x)$, определённой в окрестности точки а и имеющей в ней производные до (n+1)-го порядка включительно, справедлива ***формула Тейлора***:

$$f(x)=f(a)+\frac{(x-a)}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\frac{(x-a)^3}{3!}f'''(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+R_n,$$

где R_n – остаточный член в форме Лагранжа. При $n\to\infty$; $R_n\to 0$

$$R_n=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot f^{(n+1)}(a+\theta(x-a));$$

$$\theta(x-a)=\xi,\ x<\xi<a,\ 0<\theta<1$$

Переходя к пределу при $n\to\infty$ в формуле Тейлора, получим справа бесконечный ряд, который называется *рядом Тейлора*.

$$\mathrm{f(x)}=f(a)+\frac{(x-a)}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a).$$

Если в ряд Тейлора подставить a = 0, то получится ряд, называющийся *рядом Маклорена*:

$$f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\ldots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\ldots$$

<u>Пример:</u> Разложить функцию в ряд и найти интервал сходимости

$$
\begin{array}{l|l}
y=e^{x} \quad \text{или} \quad f(x)=e^{x} & y(0)=e^{0}=1 \\
 & \\
y'=e^{x} & y'(0)=e^{0}=1 \\
y''=e^{x} & y''(0)=e^{0}=1 \\
y'''=e^{x} & y''(0)=e^{0}=1
\end{array}
$$

$$1+\frac{x}{1!}\cdot 1+\frac{x^2}{2!}\cdot 1+\frac{x^3}{3!}\cdot 1+\ldots$$

$$e^x\approx 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\ldots$$

Найдём интервал сходимости

$R=\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{a_n}{a_{n+1}}|=\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{(n+1)!}{n!}|=\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)=\infty$, т.е. ряд сходится в интервале $(-\infty;+\infty)$.

Ответ: $(-\infty;+\infty)$

Пример:

$$
\begin{array}{l|l}
y=\sin x & y(0)=\sin 0=0 \\
 & \\
y'=\cos x & y'(0)=\cos 0=1 \\
y''=-\sin x & y''(0)=-\sin 0=0 \\
y'''=-\cos x & y'''(0)=-\cos 0=-1 \\
y''''=\sin x & y''''(0)=0 \\
y^{(5)}=\cos x & y^{(5)}(0)=1 \\
y^{(6)}=-\sin x & y^{(6)}(0)=0 \\
y^{(7)}=-\cos x & y^{(7)}(0)=-1 \\
y^{(8)}=\sin x & y^{(8)}(0)=0
\end{array}
$$

$$0+\frac{x}{1!}\cdot 1+\frac{x^2}{2!}\cdot 0+\frac{x^3}{3!}\cdot(-1)+\frac{x^4}{4!}\cdot 0+\frac{x^5}{5!}\cdot 1+\frac{x^6}{6!}\cdot 0+\frac{x^7}{7!}\cdot(-1)+\frac{x^8}{8!}\cdot 0+\ldots$$

$$\sin x\approx\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\frac{x^{11}}{11!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots$$

Легко проверить, что полученный ряд сходится на всей числовой оси.

Ответ: $(-\infty;+\infty)$

Два степенных ряда можно почленно складывать, умножать, по правилу умножения многочлена на многочлен. При этом интервал сходимости полученного ряда будет представлять собой совокупность таких точек, в которых сходятся одновременно оба ряда [5].

Пример: $y=\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)=\mathrm{y}_1-\mathrm{y}_2$

$$
\begin{array}{l|l}
y_1=\ln(1+x) & y_1(0)=\ln(1+0)=\ln 1=0 \\
y_1{}^{I}=\dfrac{1}{1+x}=(1+x)^{-1} & y_1^{I}(0)=1 \\
y_1{}^{II}=-1(1+x)^{-2} & y_1^{II}(0)=-1 \\
y_1{}^{III}=2(1+x)^{-3} & y_1^{III}(0)=2 \\
y_1{}^{IV}=-6(1+x)^{-4} & y_1^{IV}(0)=-6
\end{array}
$$

$$\ln|1+x|=0+\frac{x}{1!}\cdot 1+\frac{x^2}{2!}\cdot(-1)+\frac{x^3}{3!}\cdot 2+\frac{x^4}{4!}\cdot(-6)+\ldots=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$$

$$
\begin{array}{l|l}
y_2=\ln(1-x) & y_2(0)=\ln(1-0)=\ln 1=0 \\
y_2{}^{I}=\dfrac{1}{1-x}(-1)=-(1-x)^{-1} & y_2^{I}(0)=-1 \\
y_2{}^{II}=-1(1-x)^{-2} & y_2^{II}(0)=-1 \\
y_2{}^{III}=-2(1-x)^{-3} & y_2^{III}(0)=-2 \\
y_2{}^{IV}=-6(1-x)^{-4} & y_2^{IV}(0)=-6
\end{array}
$$

$$\ln(1-x)=0+\frac{x}{1!}\cdot(-1)+\frac{x^2}{2!}\cdot(-1)+\frac{x^3}{3!}\cdot(-2)+\frac{x^4}{4!}\cdot(-6)+\ldots=-\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}-\ldots$$

$$y=\ln\frac{1+x}{1-x}=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\ldots=$$

$$=2\frac{x}{1}+2\frac{x^3}{3}+2\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\ldots+2\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots$$

Пример: $y=(1+x)e^x$

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\cdot 1+\ldots \quad \text{(см. § 9, п. 1)}$$

$$y=(1+x)\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\right)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+x+\frac{x^2}{1!}+\frac{x^3}{2!}+\frac{x^4}{3!}+\ldots=$$

$$=1+x+\frac{x+x^2}{1!}+\frac{x^2+x^3}{2!}+\frac{x^3+x^4}{3!}+\ldots+\frac{x^{(n-1)}+x^n}{(n-1)!}+\ldots$$

§10. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

Бесконечные ряды применяются также для приближённого вычисления неопределённых и определённых интегралов в случаях, когда первообразная не выражается в конечном виде через элементарные функции, либо нахождение первообразной сложно.

Пусть требуется вычислить $\int\limits_a^b f(x)dx$ с точностью до $\varepsilon > 0$. Если подынтегральную функцию *f(x)* можно разложить в ряд по степеням x и интервал сходимости ($-R$; R) включит в себя отрезок [a; b], то для вычисления заданного интеграла можно воспользоваться свойством почленного интегрирования этого ряда.

<u>Пример:</u> $y = \int\limits_0^{1/4} e^{-x^2}dx$ вычислить с точностью до ε=0,001

$$
\begin{array}{l|l}
f(x) = e^{-x^2} & f(0) = e^0 = 1 \\
f^{I}(x) = e^{-x^2}(-2x) & f^{I}(0) = 0 \\
f^{II}(x) = e^{-x^2}(4x^2 - 2) & f^{II}(0) = -2 \\
f^{III}(x) = e^{-x^2}(-8x^3 + 12x) & f^{III}(0) = 0 \\
f^{IV}(x) = e^{-x^2}(16x^4 - 48x^2 + 12) & f^{IV}(0) = 12
\end{array}
$$

$$y = \int\limits_0^{1/4} e^{-x^2}dx = \int\limits_0^{1/4}\left(1 + \frac{x}{1!}\cdot 0 + \frac{x^2}{2!}\cdot(-2) + \frac{x^3}{3!}\cdot 0 + \frac{x^4}{4!}\cdot 12 + \ldots\right)dx =$$

$$= \int\limits_0^{1/4}\left(1 - \frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{2} - \ldots\right)dx = x\Big|_0^{1/4} - \frac{x^3}{3}\Big|_0^{1/4} + \frac{x^5}{10}\Big|_0^{1/4} + \ldots = \frac{1}{4} - \frac{1}{192} + \frac{1}{4^5\cdot 10} - \ldots$$

Так как $\frac{1}{192} = 0{,}0052.. > 0{,}001$, а $\frac{1}{4^5\cdot 10} < 0{,}001$, то с точностью до 0,001 имеем:

$$\int\limits_0^{1/4} e^{-x^2}dx \approx \frac{1}{4} - \frac{1}{192} = 0{,}245$$

Ответ: 0,245.

Можно применять бесконечные ряды для приближенного вычисления значений функций.

<u>Пример:</u> Найти примерное значение $\sin 10^0$ с точностью до 0,0001.

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots$$

$$\alpha_{рад}=\frac{\pi}{180^0}\cdot\alpha_{град}\text{, т.к. }\alpha_{град}=10\Rightarrow\alpha_{рад}=\frac{\pi}{18}$$

$$\sin 10^0\approx\frac{\pi}{18\cdot 1!}-\frac{\pi^3}{18^3\cdot 3!}+\frac{\pi^5}{18^5\cdot 5!}-\ldots$$

Так как $\frac{\pi^5}{18^5\cdot 5!}<0{,}0001\Rightarrow\sin 10^0=\frac{\pi}{18\cdot 1!}-\frac{\pi^3}{18^3\cdot 3!}$

§11. РЯДЫ ФУРЬЕ

При изучении разнообразных периодических процессов, т.е. процессов, которые через определённый промежуток времени повторяются, целесообразно разлагать периодические функции, описывающие эти процессы, не в степенной ряд, а в тригонометрический ряд.

Тригонометрическим рядом называется функциональный ряд вида:

$$\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+\ldots+a_n\cos nx+b_n\sin nx+\ldots=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

где действительные числа $a_0,$ a_n, b_n (n=1,2,...) называются *коэффициентами* ряда.

Пусть $f(x)$ – произвольная периодическая функция с периодом 2π. Предположим, что функция $f(x)$ разлагается в тригонометрический ряд:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\qquad(1)$$

В качестве основного промежутка возьмём отрезок [–π; π] и предположим, что ряд на этом отрезке можно почленно интегрировать. Вычислим коэффициенты a_n и b_n. Для этого проинтегрируем обе части равенства (1) в пределах от –π до π.

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx)=$$

$$=\frac{a_0}{2}x|_{-\pi}^{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cdot\frac{\sin nx}{n}|_{-\pi}^{\pi}-b_n\cdot\frac{\cos nx}{n}|_{-\pi}^{\pi})=$$

$$=\frac{a_0}{2}(\pi+\pi)+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cdot 0-b_n\cdot 0)=a_0\pi$$

Отсюда

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx\qquad(2)$$

Умножив обе части равенства (1) на cos mx и проинтегрировав полученный ряд в пределах от –π до π, получим:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mxdx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mxdx + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cdot\cos nxdx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cdot\sin nxdx)$$

В силу формул:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx = \begin{cases}(\sin nx)/n\big|_{-\pi}^{\pi} = 0, (n\neq 0)\\ \mathrm{x}\big|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi(n=0)\end{cases} \qquad (3)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cdot\cos nxdx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x)dx = \begin{cases}0, (m\neq n)\\ \pi, (m=n)\end{cases} \qquad (4)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cdot\cos nxdx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x)dx = 0 \qquad (5)$$

Из последнего равенства при $m=n$ получаем:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos nxdx = a_n\cdot\pi$$

Отсюда:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx \quad , n = 1, 2, 3 \qquad (6)$$

Аналогично, умножив равенство (1) на sin mx и проинтегрировав почленно на отрезке [–π; π], найдём

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx, n = 1, 2, 3 \qquad (7)$$

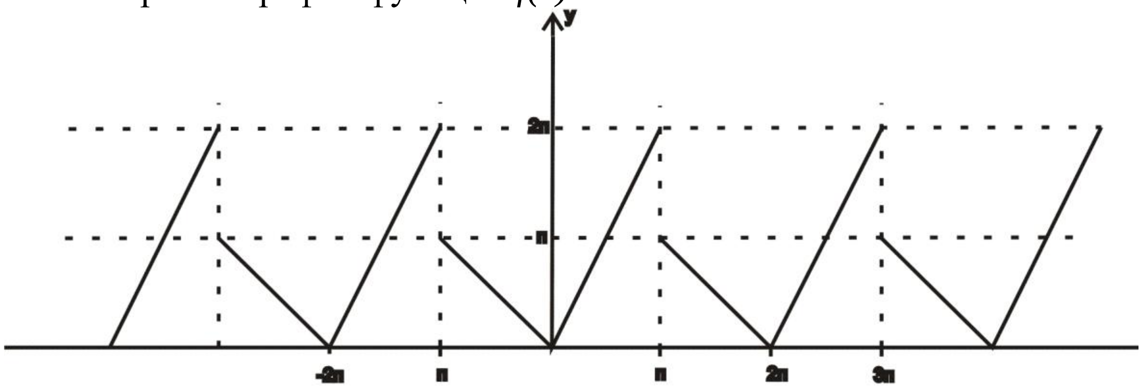
Числа a_0, a_n, b_n, определяемые по формулам (2), (6), (7), называются *коэффициентами Фурье* функции *f(x)*, а тригонометрический ряд с такими коэффициентами – *рядом Фурье* функции *f(x)*

Пример: Разложим в ряд Фурье функцию *f(x)* периода 2π, заданную на отрезке $[-\pi;\,\pi]$ формулой

$$f(x)=\begin{cases}2x & при\ 0\le x\le\pi\\ -x & при -\pi\le x\le 0\end{cases}$$

Решение:

Изобразим график функции *f(x)*



Находим коэффициенты ряда:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}2xdx=\frac{1}{\pi}\cdot\left(-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-\pi}^{0}+\frac{1}{\pi}\cdot 2\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_{0}^{\pi}=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2}+\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{1}=$$

$$=\frac{\pi}{2}+\pi=\frac{3\pi}{2};$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\cdot\cos nxdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}2x\cdot\cos nxdx=$$

$$=\left|\begin{matrix}\text{интегрируем по частям} & \\ u=x & dv=\cos nxdx\\ du=dx & v=\dfrac{1}{n}\sin nx\end{matrix}\right|=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx\Bigg|_{-\pi}^{0}+\frac{1}{n^2}\cos nx\Bigg|_{\pi}^{0}\right)+$$

$$+\frac{2}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx\Bigg|_{0}^{\pi}+\frac{1}{n^2}\cos nx\Bigg|_{0}^{\pi}\right)=$$

$$=-\frac{1}{\pi n^2}(1-\cos\pi n)+\frac{2}{\pi n^2}(\cos\pi n-1)=-\frac{3}{\pi n^2}(1-(-1)^n).$$

Аналогично находим

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\sin nxdx=\ldots=\frac{1}{n}(-1)^{n+1}.$$

Исходной функции f(x) соответствует ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{3\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{3}{\pi n^2}\left(1-(-1)^n\right)\cos nx + \frac{1}{n}(-1)^{n+1}$$

$$f(x) = \frac{3\pi}{4} - \frac{6}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right) + \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots\right).$$

§12. РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯД ФУРЬЕ ЧЁТНЫХ И НЕЧЁТНЫХ ФУНКЦИЙ

Если разлагаемая на отрезке [–π; π] в ряд Фурье функция *f(x)* является чётной или нечётной, то это отражается на формулах коэффициентов Фурье (вычисление их упрощается) и на виде самого ряда (он становится так называемым неполным).

Как известно, если функция *f(x)* интегрируема на симметричном отрезке [–*a*; *a*], то

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 2\cdot\int_{0}^{a} f(x)dx & \text{, если } f(x) \text{ – чётная функция} \\ 0 & \text{, если } f(x) \text{ – нечётная функция} \end{cases}$$

Если функция *f(x)* – чётная, то *f(x)*cos*xn* – чётная функция, а *f(x)*sin*xn* – нечётная функция.

Если же *f(x)* – нечётная функция, то очевидно функция *f(x)*cos*xn* – нечётная, а *f(x)*sin*xn* – чётная.

Для *нечётных* функций ряд Фурье имеет вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \text{ где } a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx,\ a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx, \qquad n \in \mathrm{N}$$

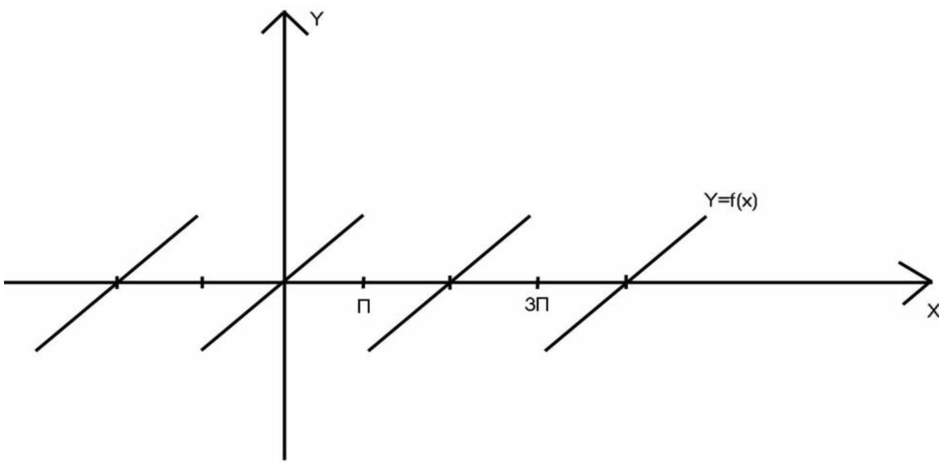
(множество натуральных чисел).

Для *чётных* функций ряд Фурье имеет вид:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \text{ где } b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx,\ n \in \mathrm{N}$$

<u>Пример:</u> Разложить в ряд Фурье функцию

f(x)=*x*, *x*∈(– π; π)



Эта функция – нечётная.

Следовательно, $a_n = 0$, $n = 0, 1,\ldots$, а

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx\,\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n^2}\sin nx\,\Big|_0^{\pi}\right) = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\right)\cos \pi n,$$

т.е. $b_n = \frac{2}{n}\cdot(-1)^{n+1}(n \in N)$. Ряд Фурье содержит только синусы:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\cdot(-1)^{n+1}\cdot\sin nx = 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots\right).$$

СПИСОК ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ ВОПРОСОВ

1. *Числовые ряды:*
– основные понятия;
– ряд геометрической прогрессии;
– необходимый признак сходимости числового ряда;
– гармонический ряд;
– достаточные признаки сходимости знакопостоянных рядов;
– ряд Дирихле;
– знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница;
– общий достаточный признак сходимости знакопеременных рядов;
– абсолютная и условная сходимости числовых рядов;
– свойства сходящихся рядов.

2. *Степенные ряды:*
– основные понятия функциональных рядов;
– сходимость степенных рядов. Теорема Абеля;
– интервал и радиус сходимости степенного ряда;
– свойства степенных рядов;
– ряды Тейлора и Маклорена;

- разложение некоторых элементарных функций в ряд Тейлора (Маклорена);
- приближённое вычисление определённых интегралов;
- приближенное вычисление значений функции.

3. *Ряды Фурье:*
- тригонометрический ряд Фурье;
- разложение в ряд Фурье 2π – периодических функций;
- разложение в ряд Фурье чётных и нечётных функций.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Высшая математика для экономистов: учебное пособие для вузов/ под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. – 471 с.
2. Красс, М.С. Математика для экономических специальностей: учебник / М.С. Красс. – М.: ИНФРА-М, 1998. – 464 с.
3. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов: учебное пособие для втузов / Н.С. Пискунов. – М.: Наука, 1985. – Т. 2.– 560 с.
4. Шмелев, П.А. Теория рядов в задачах и упражнениях: учебное пособие для студентов втузов / П.А. Шмелев. – М.: Высшая школа, 1983. – 176 с.
5. Власова, Е.А. Ряды: учебник для вузов / Е.А. Власова; под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – 3-е изд., исправл. – М.: Изд-во МГТУ, 2006. – 616 с.
6. Воробьёв, Н.Н. Теория рядов: учебное пособие для втузов / Н.Н. Воробьёв. – М.: Наука, 1986. – 408 с.
7. Кузнецов, Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчёты): учебное пособие / Л.А. Кузнецов. – М.: Высшая школа, 1983. – 175 с.
8. Сборник задач по высшей математике/ К.Н. Лунгу, В.П. Норин, Д.Т. Письменный, Ю.А. Шевченко; под ред. С.Н. Федина. – М.: Айрис-пресс, 2004. – 592 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

§1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ. СХОДИМОСТЬ РЯДА 3
§2. НЕОБХОДИМЫЙ ПРИЗНАК СХОДИМОСТИ РЯДА 5
§3. ДОСТАТОЧНЫЕ ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ РЯДОВ 7
§4. ЗНАКОЧЕРЕДУЮЩИЕСЯ РЯДЫ 13
§5. ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЕ РЯДЫ 14
§6. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ 15
§7. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ. ИНТЕРВАЛ И РАДИУС СХОДИМОСТИ СТЕПЕННОГО РЯДА 18
§8. СВОЙСТВА СТЕПЕННЫХ РЯДОВ 21
§9. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА. РЯД ТЕЙЛОРА. РЯД МАКЛОРЕНА 22
§10. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ 25
§11. РЯДЫ ФУРЬЕ 26
§12. РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯД ФУРЬЕ ЧЁТНЫХ И НЕЧЁТНЫХ ФУНКЦИЙ 29
СПИСОК ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ ВОПРОСОВ 30
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК 31